J. P. SCHOUTEN en A. T. DE HOOP

HET BEGINSEL VAN HUYGENS BIJ BUIGINGSPROBLEMEN

TIJDSCHRIFT VAN
HET NEDERLANDS RADIOGENOOTSCHAP
DEEL XVII–2 MAART 1952 Blz. 45–62

Overdruk uit het Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Het beginsel van Huygens bij Buigingsproblemen

door J. P. Schouten en A. T. de Hoop

Voordracht gehouden door A. T. de Hoop voor het Nederlands Radiogenootschap op 3 December 1951.

SUMMARY

Following a method given by A. G. Clavier[3]) Huygens' Principle for electromagnetic waves is derived directly from Maxwell's equations in fact without making use of fictitious magnetic charge and current densities. After establishing different forms of Huygens' Principle it is shown that if the surface S over which the integrals have to be extended degenerates into an infinite plane, the obtained expressions are equivalent to those made plausible by W. R. Smythe[6]).

Inleiding.

Van de buigingsproblemen, die bij de techniek der zeer hoge frequenties (in de orde van 3000 Mhz) naar voren komen, zijn in vele gevallen nog geen strenge oplossingen bekend; enkele voorbeelden hiervan zijn: het veld van een spleetantenne, de buiging van een vlakke e.m. golf aan een omwentelingsparaboloide en het veld van een kaasantenne, die gevoed wordt door een electromagnetische hoorn.

Buigingsproblemen, waarvan wel strenge oplossingen bekend zijn, worden gevormd door de buiging van een vlakke e.m. golf aan een oneindig dun, oneindig goed geleidend halfvlak (A. Sommerfeld)[1]), de buiging van een vlakke e.m. golf aan een oneindig dunne, oneindig goed geleidende, cirkelvormige vlakke schijf en het daarmee complementaire probleem van de buiging van een vlakke e.m. golf aan een cirkelvormige opening in een oneindig groot, oneindig dun, oneindig goed geleidend vlak scherm*) (J. Meixner en W. Andrejewski)[2]).

*) Wanneer in het hierna volgende gesproken wordt over een scherm, is steeds bedoeld een scherm, dat oneindig dun en oneindig goed geleidend is.

In die gevallen echter, waarin nog geen strenge oplossing bestaat, vraagt de techniek om een zekere, voor de practijk voldoende benadering. Om hiertoe te geraken, wordt in enkele gevallen uitgegaan van een bekend veronderstelde waarde van de electrische en/of de magnetische veldsterkte op een gegeven oppervlak, dat geschikt gekozen is (b.v. in de mond van een golfpijp of bij een spleetantenne in de spleet in het vlak van het scherm). Zo komt men tot de opgave de electrische en de magnetische veldsterkte in een willekeurig punt van de ruimte uit te drukken in de waarde van de electrische en/of de magnetische veldsterkte op een gegeven oppervlak. Dit probleem, waarvan de oplossing, met de restrictie, dat er geen terugstraling optreedt, het beginsel van Huygens weergeeft, komt aan de orde in § 1 en § 2. De aldaar gegeven afleiding is in principe afkomstig van A. G. Clavier[3]). Zijn resultaten (die niet geheel juist zijn) worden hier gecorrigeerd en bovendien zodanig uitgebreid, dat, voor e.m. velden, die enkelvoudig harmonisch van de tijd afhangen, de in § 2 gegeven formules (2.12), (2.13), (2.14) en (2.15) overeenstemmen met die van J. A. Stratton[4]), die deze uitdrukkingen langs andere weg verkregen heeft.

In het geval, dat bovengenoemd oppervlak een plat vlak is, worden de formules (1.19) en (1.20) uit § 1 aanzienlijk vereenvoudigd; dan zijn nl. de electrische en de magnetische veldsterkte in een willekeurig punt van de ruimte uit te drukken in de tangentiële component van of de electrische of de magnetische veldsterkte in het genoemde vlak. De hierop betrekking hebbende in § 3 gegeven resultaten (3.5) en (3.6) zijn reeds gebruikt door H. A. Bethe[5]) en W. R. Smythe[6]), echter zonder de in het hier volgende artikel gegeven motivering. Op andere, zeer elegante wijze zijn H. Levine en J. Schwinger[7]) tot (3.5) en (3.6) gekomen, door gebruik te maken van een vectoranalogon van het theorema van Green en een functie van Green in tensorvorm in te voeren.

1. *Integratie van de veldvergelijkingen.*

Uitgangspunt vormen de vergelijkingen von Maxwell voor een homogeen en isotroop medium

$$\nabla \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{1.2}$$

en de aanvullende betrekkingen

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon} \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{1.4}$$

waarin $\vec{H}$ de magnetische veldsterkte in A/m, $\vec{E}$ de electrische veldsterkte in V/m, $\vec{J}$ de dichtheid van de geleidingsstroom in A/m^2, ϱ de dichtheid van de ware ladingen in C/m^3, μ de permeabiliteit in H/m en ε de diëlectrische constante in F/m voorstelt. De vergelijkingen zijn dus geschreven in het gerationaliseerde stelsel van Giorgi (*mks*-stelsel).

In de onderstelling, dat het deel van de grootheid ϱ, dat niet met de tijd varieert, nul is (dus geen electrostatische ladingen), kan voor de veldgrootheden $\vec{E}$ en $\vec{H}$ in een willekeurig punt P van de ruimte een uitdrukking gevonden worden door middel van de vectorpotentiaal $\vec{A}$, die gegeven wordt door

$$\vec{A}_P = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{1.5}$$

waarin de integratie uitgestrekt dient te worden over de gehele oneindige ruimte. In de integrand betekent $\vec{J}^*$, dat de waarde van $\vec{A}_P$ ten tijde t bepaald wordt door de waarde van $\vec{J}$ ten tijde $t - \frac{r}{c}$, waarin c de voortplantingssnelheid van electromagnetische golven in het beschouwde medium is en r de afstand van het stelpunt P tot het betreffende stroomelement $\vec{J}dv$ voorstelt. Aangenomen wordt, dat $\vec{J}$ een zodanige functie is, dat de integraal in (1.5) bestaat.

Dan geldt

$$\vec{H}_P = \frac{1}{\mu} \nabla_P \times \vec{A}_P \tag{1.6}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \nabla_P \times \vec{H}_P = \frac{1}{\mu} \nabla_P \times \nabla_P \times \vec{A}_P \tag{1.7}$$

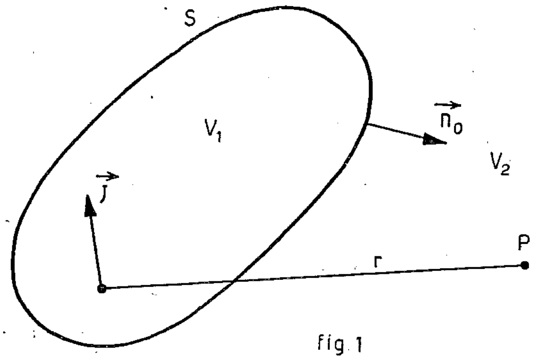

fig. 1

mits $\vec{J}$ in het punt P gelijk aan nul is. ∇_P geeft aan, dat de operator ∇ toegepast wordt op de coördinaten van punt P.

Het gebied V (de gehele oneindige ruimte) wordt nu gesplitst in twee delen, nl. een gebied V_1 en een gebied V_2, waarbij V_2 het niet begrensde deel van V is (zie fig. 1). Beide gebieden worden gescheiden door het gesloten oppervlak S.

De uitdrukkingen voor $\vec{H}_P$ en $\varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ worden dan

$$\vec{H}_P = \frac{1}{\mu} \nabla_P \times \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1+V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{1.8}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla_P \times \nabla_P \times \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_1+V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{1.9}$$

Punt P zij nu een punt van gebied V_2; de volumeintegraal $\int_{V_1} \frac{\vec{J}^*}{r} dv$ over V_1 is dan te herleiden tot een integraal van de waarden van $\vec{E}$ en $\vec{H}$ in het gebied V_1. Deze waarden zullen worden aangeduid met $\vec{E}_0$ resp. $\vec{H}_0$, terwijl de operator ∇, die toegepast wordt op de coördinaten van de punten van V_1 aangegeven zal worden met ∇_0.

Daar

$$\frac{\vec{J}^*}{r} = \frac{(\nabla_0 \times \vec{H}_0)^*}{r} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \tag{1.10}$$

en

$$\frac{(\nabla_0 \times \vec{H}_0)^*}{r} = \nabla_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} + \nabla_P \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \tag{1.11}$$

geldt

$$\frac{\vec{J}^*}{r} = \nabla_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} + \nabla_P \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \tag{1.12}$$

Uit (1.2) volgt

$$\mu \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial t} = - \nabla_0 \times \vec{E}_0$$

dus

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{H}_0^*}{r} = - \frac{(\nabla_0 \times \vec{E}_0)^*}{r} = - \nabla_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} - \nabla_P \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \tag{1.13}$$

Gebruik makend van (1.13), (1.12) en (1.8) vindt men dan

$$4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \left(\nabla_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) dv - \nabla_P \times \nabla_P \times \int_{V_1} \left(\nabla_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) dv -$$

$$- \nabla_P \times \int_{V_1} \left(\nabla_P \times \nabla_P \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) dv +$$

$$+ \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{1.14}$$

De derde term in het rechterlid van (1.14) is echter gelijk aan nul, want

$$\nabla_P \times \nabla_P \times \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv + \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv =$$

$$= \nabla_P \left(\nabla_P \cdot \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv \right) - \nabla_P^2 \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv + \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv$$

$$= \nabla_P \left(\nabla_P \cdot \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv \right)$$

daar $\int_{V_1} \frac{E_0^*}{r} dv$ aan de golfvergelijking voldoet, en

$$\nabla_P \times \nabla_P \left(\nabla_P \cdot \int_{V_1} \frac{\vec{E}_0^*}{r} dv \right) = 0$$

zodat dus

$$4\pi\mu\frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)dv - \nabla_P\times\nabla_P\times\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)dv +$$

$$+\mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_2}\frac{\vec{J}_0^*}{r}dv \tag{1.15}$$

Op analoge wijze wordt (1.9) herleid. Het resultaat is

$$4\pi\varepsilon\frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \nabla_P\times\nabla_P\times\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)dv + \varepsilon\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)dv +$$

$$+\nabla_P\times\nabla_P\times\int_{V_2}\frac{\vec{J}^*}{r}dv \tag{1.16}$$

Met behulp van een der stellingen van Gauss worden de volumeintegralen over V_1 omgezet in oppervlakteintegralen over S.

$$\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)dv = \int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)ds \tag{1.17}$$

$$\int_{V_1}\left(\nabla_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)dv = \int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)ds \tag{1.18}$$

Hierin is $\vec{n}_0$ de eenheidsvector in de richting van de normaal op oppervlak S, gericht van V_1 naar V_2.

Substitutie van (1.17) en (1.18) in (1.15) en (1.16) geeft

$$4\pi\mu\frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)ds - \nabla_P\times\nabla_P\times\int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)ds$$

$$+\mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_2}\frac{\vec{J}^*}{r}dv \tag{1.19}$$

$$4\pi\varepsilon\frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \nabla_P\times\nabla_P\times\int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{H}_0^*}{r}\right)ds + \varepsilon\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int_S\left(\vec{n}_0\times\frac{\vec{E}_0^*}{r}\right)ds$$

$$+ \nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \qquad (1.20)$$

Wanneer S zodanig wordt gekozen, dat overal in V_2 geldt $\vec{J} = 0$, dan wordt de laatste term in (1.19) en (1.20) gelijk aan nul.

Zijn dus $\vec{n}_0 \times \vec{H}_0$ en $\vec{n}_0 \times \vec{E}_0$ op een gesloten oppervlak S, dat een systeem van stromen en ladingen geheel omgeeft, bekend, dan volgen uit (1.19) en (1.20) de waarden van $\frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ en $\frac{d \vec{E}_P}{\partial t}$ in een willekeurig punt P *buiten* S.

2. *Mathematische formulering van het principe van Huygens.*

In de uitdrukkingen (1.19) en (1.20) voor $4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ resp. $4\pi\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ kunnen de operaties ∇_P onder het integraalteken worden uitgevoerd. Physisch wil dit zeggen, dat van elk oppervlakte-element dS van S de bijdrage tot $4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ en $4\pi\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ bepaald wordt, waarna deze bijdragen over het oppervlak S geintegreerd worden. Hierbij moet rekening gehouden worden met eventuële discontinuïteiten van $\vec{H}_0$ en $\vec{E}_0$ op het oppervlak S. Mathematisch komen deze tot uiting in lijnintegralen langs de krommen, waarlangs $\vec{H}_0$ en $\vec{E}_0$ discontinu zijn.

Beschouwd wordt nu de bijdrage tot $4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ en $4\pi\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ van een deel $\triangle S$ van het oppervlak S.

De eerste term in het rechterlid van (1.19) wordt

$$\mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds = \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \nabla_P \times \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds \,. \qquad (2.1)$$

Deze blijft verder ongewijzigd.

De tweede term in het rechterlid van (1.19) wordt

$$-\nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = -\nabla_P \int\limits_{\triangle S} \nabla_P \cdot \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds +$$

$$+ \nabla_P^2 \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds \, .$$

Nu volgt uit (1.13)

$$-\int\limits_{\triangle S} \nabla_P \cdot \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = \int\limits_{\triangle S} \vec{n}_0 \cdot \left(\nabla_P \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds =$$

$$= -\int\limits_{\triangle S} \vec{n}_0 \cdot \left(\nabla_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds - \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds$$

$$= -\int\limits_{C} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \cdot d\vec{l} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \cdot \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds$$

waarin C de rand van $\triangle S$ is.

Daar $\int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds$ aan de golfvergelijking voldoet, is dus

$$-\nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = \nabla_P \int\limits_{C} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \cdot d\vec{l} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla_P \int\limits_{\triangle S} \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{H}_0^*}{r} ds$$

$$+ \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds \qquad (2.2)$$

Hiermede wordt (1.19)

$$4\pi\mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \nabla_P \times \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla_P \int\limits_{\triangle S} \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{H}_0^*}{r} ds +$$

$$+ \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{\triangle S} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds - \nabla_P \int\limits_{C} \frac{\vec{E}_0^*}{r} \, d\vec{l} +$$

$$+ \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.3}$$

Op grond van de symmetrie in de vergelijkingen van Maxwell, geldig in een punt P, waar $\vec{J} = 0$, kan men de analoge uitdrukking voor $4\pi\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ verkrijgen door in de eerste vier termen in het rechterlid van (2.3) $\vec{E}_0$ door $-\vec{H}_0$ en ε door μ te vervangen en omgekeerd. Het resultaat is

$$4\pi\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Delta S} \nabla_P \times \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla_P \int\limits_{\Delta S} \frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{E}_0^*}{r} ds -$$

$$- \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{\Delta S} \left[\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right] ds + \nabla_P \int\limits_{C} \frac{\vec{H}_0^*}{r} \cdot \vec{dl} +$$

$$+ \nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.4}$$

In het geval, dat het oppervlak S zodanig wordt gekozen, dat op S geldt $\nabla_0 \cdot \vec{E}_0 = 0$, kunnen de uitdrukkingen (2.3) en (2.4) nog in een andere gedaante worden gebracht. Daartoe wordt gebruik gemaakt van de volgende betrekkingen uit de vectoranalyse

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \nabla_P \times \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) = \vec{n}_0 \times \left(\nabla_P \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) - (\vec{n}_0 \times \nabla_P) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \\
&\text{b)} \quad \vec{n}_0 \times \left(\nabla_P \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) = \nabla_P \left(\frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{H}_0^*}{r}\right) - (\vec{n}_0 \cdot \nabla_P) \frac{\vec{H}_0^*}{r} \\
&\text{c)} \quad (\vec{n}_0 \times \nabla_P) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} = \frac{[(\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \vec{H}_0]^*}{r} \quad (-\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \\
&\text{d)} \quad (\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \vec{H}_0 = \vec{n}_0 \times (\nabla_0 \times \vec{H}_0) + (\vec{n}_0 \cdot \nabla_0) \vec{H}_0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

daar $\nabla_0 \cdot \vec{H}_0 = 0$.

Dezelfde betrekkingen gelden eveneens voor $\vec{E}_0$, daar S zodanig gekozen is, dat $\nabla_0 . \vec{E}_0 = 0$.

Met de relaties (2.5) wordt voor de eerste term in het rechterlid van (2.3) gevonden

$$\nabla_P \times \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) = \nabla_P \left(\frac{\vec{n}_0 . \vec{H}_0^*}{r} \right) - (\vec{n}_0 . \nabla_P) \frac{\vec{H}_0^*}{r} -$$

$$- \frac{[(\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \vec{H}_0]^*}{r} + (\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \tag{2.6}$$

Verder volgt uit (1.1)

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) = \frac{[\vec{n}_0 \times (\nabla_0 \times \vec{H}_0)]^*}{r} =$$

$$= \frac{[(\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \vec{H}_0]^*}{r} - \frac{[(\vec{n}_0 . \nabla_0) \vec{H}_0]^*}{r} \tag{2.7}$$

Substitutie van (2.6) en (2.7) in (2.3) geeft

$$4 \pi \mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = - \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \left\{ (\vec{n}_0 . \nabla_P) \frac{\vec{H}_0^*}{r} + \frac{[(\vec{n}_0 . \nabla_0) \vec{H}_0]^*}{r} \right\} ds +$$

$$+ \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} (\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} ds - \nabla_P \int\limits_C \frac{\vec{E}_0^*}{r} . \vec{dl} +$$

$$+ \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.8}$$

Volgens een van de stellingen van S t o k e s is

$$\int\limits_{\triangle S} (\vec{n}_0 \times \nabla_0) \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} ds = - \int\limits_C \frac{\vec{H}_0^*}{r} \times \vec{dl} \tag{2.9}$$

Hiermede wordt (2.8)

$$4 \pi \mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = - \mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\triangle S} \left\{ \left(\vec{n}_0 . \nabla_P \right) \frac{\vec{H}_0^*}{r} + \frac{[(\vec{n}_0 . \nabla_0) \vec{H}_0]^*}{r} \right\} ds -$$

$$- \mu \frac{\partial}{\partial t} \int_C \frac{\vec{H}_0^*}{r} \times \vec{dl} - \nabla_P \int_C \frac{\vec{E}_0^*}{r} . \vec{dl} +$$

$$+ \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.10}$$

De analoge uitdrukking voor $4 \pi \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ luidt

$$4 \pi \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_{\triangle S} \left\{ \left(\vec{n}_0 . \nabla_P \right) \frac{\vec{E}_0^*}{r} + \frac{[(\vec{n}_0 . \nabla_0) \vec{E}_0]^*}{r} \right\} ds -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_C \frac{\vec{E}_0^*}{r} \times \vec{dl} + \nabla_P \int_C \frac{\vec{H}_0^*}{r} . \vec{dl} +$$

$$+ \nabla_P \times \nabla_P \times \int_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.11}$$

De uitdrukkingen (2.3) en (2.10) geven de bijdrage van het beschouwde deel $\triangle S$ van S tot de waarde van $4 \pi \mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$, de corresponderende uitdrukkingen (2.4) en (2.11) de bijdrage tot de waarde van $4 \pi \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$. Teneinde $\vec{H}_P$ en $\vec{E}_P$ te bepalen, moeten de oppervlakteintegralen uitgestrekt worden over het gehele oppervlak S. Indien nu $\vec{H}_0$ en $\vec{E}_0$ op S continu zijn, vallen de lijnintegralen tegen elkaar weg, daar langs elke kromme heen en terug geïntegreerd wordt; zijn echter $\vec{H}_0$ en $\vec{E}_0$ op S niet continu, dan houdt men in de resulterende uitdrukking voor $4 \pi \mu \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ en $4 \pi \varepsilon \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ lijnintegralen langs de discontinuïteiten over. Hierbij dient het verschil tussen de limietwaarden van $\vec{H}_0$ resp. $\vec{E}_0$ aan weerszijden van de betreffende kromme C in rekening te worden gebracht. Geeft men deze lijnintegralen symbolisch aan met $\int_C$ en de oppervlakteintegralen over het gesloten oppervlak S met $\int\limits_S$ dan heeft men tenslotte

$$4\pi\mu\frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \mu\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \nabla_P\times\left(\vec{n}_\circ\times\frac{\vec{H}^*_\circ}{r}\right)ds - \mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla_P\int\limits_S\frac{\vec{n}_\circ\,.\,\vec{H}^*_\circ}{r}\,ds +$$

$$+\,\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_S\left(\vec{n}_\circ\times\frac{\vec{E}^*_\circ}{r}\right)ds - \nabla_P\int\limits_S\frac{\vec{E}^*_\circ}{r}\,.\,\vec{dl} +$$

$$+\,\mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_2}\frac{\vec{J}^*}{r}\,dv \tag{2.12}$$

uit (2.3),

$$4\pi\varepsilon\frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \nabla_P\times\left(\vec{n}_\circ\times\frac{\vec{E}^*_\circ}{r}\right)ds - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla_P\int\limits_S\frac{\vec{n}_\circ\,.\,\vec{E}^*_\circ}{r}\,ds -$$

$$-\,\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_S\left(\vec{n}_\circ\times\frac{\vec{H}^*_\circ}{r}\right)ds + \nabla_P\int\limits_C\frac{\vec{H}^*_\circ}{r}\,.\,\vec{dl} +$$

$$+\,\nabla_P\times\nabla_P\times\int\limits_{V_2}\frac{\vec{J}^*}{r}\,dv \tag{2.13}$$

uit (2.4),

$$4\pi\mu\frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = -\,\mu\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left\{(\vec{n}_\circ\,.\,\nabla_P)\frac{\vec{H}^*_\circ}{r} + \frac{[(\vec{n}_\circ\,.\,\nabla_\circ)\,\vec{H}_\circ]^*}{r}\right\}ds -$$

$$-\,\mu\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_C\frac{\vec{H}^*_\circ}{r}\times\vec{dl} - \Delta_P\int\limits_S\frac{\vec{E}^*_\circ}{r}\,.\,dl +$$

$$+\,\mu\nabla_P\times\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_2}\frac{\vec{J}^*}{r}\,dv \tag{2.14}$$

uit (2.10) en

$$4\pi\varepsilon\frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = -\,\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S\left\{(\vec{n}_\circ\,.\,\nabla_P)\frac{\vec{E}^*_\circ}{r} + \frac{[(\vec{n}_\circ\,.\,\nabla_\circ)\,\vec{E}_\circ]^*}{r}\right\}ds -$$

$$- \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_C \frac{\vec{E}_0^*}{r} \times \vec{dl} + \nabla_P \int_C \frac{\vec{H}_0^*}{r} \cdot \vec{dl} +$$

$$+ \nabla_P \times \nabla_P \times \int_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} \, dv \qquad (2.15)$$

uit (2.11).

Wanneer dus op een zeker gesloten oppervlak S, dat een systeem van stromen en ladingen geheel omgeeft, de electrische en de magnetische veldsterkte bekend zijn, kan men met behulp van (2.12) en (2.13) of (2.14) en (2.15) de electrische en de magnetische veldsterkte in een willekeurig punt P buiten S uitdrukken in de waarden van genoemde veldsterkten op S.

Bij de formulering in (2.12), (2.13), (2.14) en (2.15) moeten daartoe de normale en de tangentiële component van zowel $\vec{E}_0$ als $\vec{H}_0$ op S bekend zijn; bij de formulering in (1.19) en (1.20) hoeft men, om hetzelfde probleem op te lossen, slechts de tangentiële component van zowel $\vec{E}_0$ als $\vec{H}_0$ op S te kennen. Krachtens het eenduidigheidstheorema is echter een e.m. veld in de ruimte eenduidig bepaald door de waarde van de tangentiële component van $\vec{E}$ of die van $\vec{H}$ op een gesloten oppervlak; de overige componenten zijn dus door één van de genoemde componenten eenduidig vastgelegd.

In § 3 zal aangetoond worden, dat voor het geval, dat S een plat vlak is, de electrische en de magnetische veldsterkte in een punt van de ruimte te bepalen zijn uit of alleen de tangentiële component van $\vec{E}$ of alleen die van $\vec{H}$ op het oppervlak S.

Stratton en Chu [8]) hebben, uitgaande van (2.14) en (2.15), berekend de buiging van een vlakke e.m. golf aan een rechthoekige opening in een vlak scherm. In hun publicatie is daartoe ondersteld, dat in de opening het e.m. veld de ongestoorde waarde aanneemt en dat op het scherm het e.m. veld identiek gelijk aan nul is. De integraties moeten dan worden uitgestrekt over de opening en langs de rand ervan. Het aldus berekende veld voldoet echter niet aan de randvoorwaarden op het scherm (tangentiële component van de electrische en normale component van de magnetische veldsterkte gelijk aan nul). Teneinde nu een veld te verkrijgen, dat wel aan de randvoorwaarden op het scherm voldoet, is op het berekende veld gesuperponeerd een veld, dat zou ontstaan door reflectie van het berekende veld aan een oneindig goed geleidend vlak ter plaatse van het scherm.

Smythe [6]) heeft ingezien, dat men het aldus ontstane totale veld ook kan verkrijgen door uit te gaan van de dubbele waarde van een der oppervlakte-integralen uit (1.19) en (1.20).

Daarvoor is natuurlijk de integraal met de integrand $\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}$ het meest geschikt, daar op het scherm $\vec{n}_0 \times \vec{E}_0 = 0$ en men dus alleen over de opening hoeft te integreren. In § 3 zal worden bewezen, dat, indien men de exacte waarden van $\vec{n}_0 \times \vec{E}_0$ en $\vec{n}_0 \times \vec{H}_0$ gebruikt, de hier aangeduide methode exact is. Die exacte waarden zijn echter in het beschouwde voorbeeld niet bekend.

Tot nog toe is steeds ondersteld, dat punt P in het gebied V_2 ligt; voor de oppervlakte-integralen in (1.19) en (1.20) geldt dan op grond van de herleidingen in § 1

$$\mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds - \nabla_P \times \nabla_P \times \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds =$$

$$= \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.16}$$

en

$$\varepsilon \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds + \nabla_P \times \nabla_P \times \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds =$$

$$= \nabla_P \times \nabla_P \times \int_{V_1} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.17}$$

Hierin zijn $\vec{n}_0 \times \vec{H}_0$ en $\vec{n}_0 \times \vec{E}_0$ op oppervlak S bekend verondersteld velden. In het geval, dat punt P in gebied V_1 ligt, kan men dan schrijven

$$\mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds - \nabla_P \times \nabla \times_P \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds =$$

$$= - \mu \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r} dv \tag{2.18}$$

en

$$\varepsilon\,\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds + \nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds =$$

$$= -\,\nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_{V_2} \frac{\vec{J}^*}{r}\, dv \qquad (2.19)$$

waarbij het $-$teken in het rechterlid van (2.18) en (2.19) ver- veroorzaakt wordt door het feit, dat $\vec{n}_0$ weer van V_1 naar V_2 wijst.

In het hierna volgende zal steeds worden aangenomen, dat S zodanig is gekozen, dat overal in gebied V_2 geldt $\vec{J} = 0$. Dan blijkt uit (2.18) en (2.19), dat, in het geval dat punt P in gebied V_1 ligt, de linkerleden van (2.18) en (2.19) gelijk aan nul zijn. De oppervlakte-integralen in (2.18) en (2.19) zijn dus als functie van de plaats discontinu: als punt P buiten S ligt, geven zij de waarde van $4\pi\mu\dfrac{\partial \vec{H}_P}{\partial t}$ resp. $4\pi\varepsilon\dfrac{\partial \vec{E}_P}{\partial t}$ en als punt P binnen S ligt, geven zij de waarde nul.

Physisch gesproken geven de bekend veronderstelde waarden van $\vec{H}_0$ en $\vec{E}_0$ op S *alleen een veld naar buiten;* er vindt dus geen „terugstraling" plaats. Men kan derhalve (1.19), (1.20), (2.12), (2.13), (2.14) en 2.15) beschouwen als mathematische formuleringen van het principe van Huygens.

3. *Buiging aan vlakke schermen.*

Beschouwd wordt nu de buiging aan een vlak scherm, dat samenvalt met het vlak $z = 0$ (zie fig. 2a). Gevraagd wordt het e.m. veld in het deel van de ruimte, waar $z > 0$, wanneer van de zijde der negatieve z-as een e.m. golf invalt. Als oppervlak S wordt gekozen de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqq 0$ en het deel van het scherm $x^2 + y^2 \leqq R^2$, $z \to 0$, $z > 0$ (zie fig. 2b). Wanneer de straal van de bol, R, onbepaald toeneemt, naderen de oppervlakte-integralen $\displaystyle\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds$ en $\displaystyle\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0}{r}\right) ds$ over de halve bol tot nul krachtens de uitstralingsvoorwaarde.

Voor een willekeurig punt P met coördinaten x_P, y_P, z_P geldt dan op grond van (1.19) en (1.20)

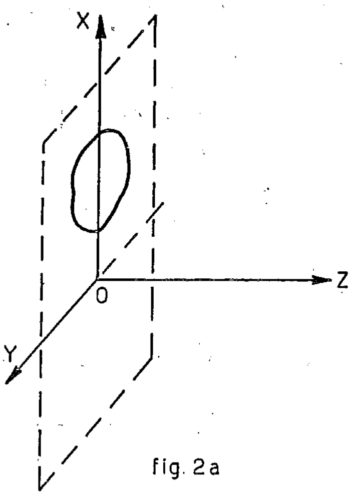

fig. 2a

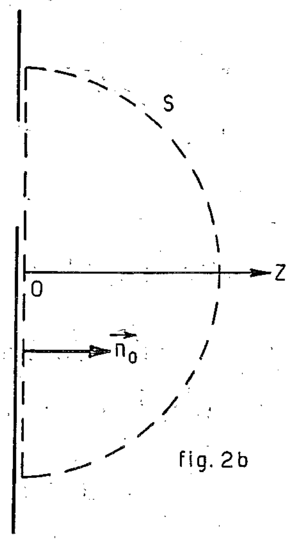

fig. 2b

$$\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds - \frac{1}{\mu}\nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = 4\pi \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} \qquad (3.1)$$

en

$$\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_P \times \nabla_P \times \int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds = 4\pi \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} \qquad (3.2)$$

indien $z_P > 0$, terwijl de linkerleden van (3.1) en (3.2) gelijk zijn aan nul, indien $z_P < 0$. De oppervlakte-integralen dienen te worden uitgestrekt over het vlak $z \to 0$, $z > 0$.

Teneinde een betrekking te vinden tussen de beide termen in het linkerlid van (3.1), wordt nagegaan de waarde van de oppervlakte-integralen in twee punten, die gespiegeld liggen ten opzichte van $z = 0$. Stel daartoe, indien alleen het argument z_P wordt aangegeven

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r}\right) ds = a_x''(z_P)\,\vec{i}_x + a_y''(z_P)\,\vec{i}_y,$$

$$\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{h}_0^*}{r}\right) ds = a_x'(z_P)\,\vec{i}_x + a_y'(z_P)\,\vec{i}_y + a_z'(z_P)\,\vec{i}_z$$

$$\frac{1}{\mu}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = b_x'''(z_P)\,\vec{i}_x + b_y'''(z_P)\,\vec{i}_y$$

$$\nabla_P \times \frac{1}{\mu}\int\limits_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r}\right) ds = b_x''(z_P)\,\vec{i}_x + b_y''(z_P)\,\vec{i}_y + b_z''(z_P)\,\vec{i}_z$$

$$\nabla_P \times \nabla_P \times \frac{1}{\mu} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds = b'_x (z_P) \vec{i}_x + b'_y (z_P) \vec{i}_y + b'_z (z_P) \vec{i}_z$$

In de integranden komt de z_P alleen kwadratisch voor. Vervangt men dus in de bovengenoemde uitdrukkingen z_P door $-z_P$, dan geldt

$$a''_x (z_P) = a''_x (-z_P); \quad a''_y (z_P) = a''_y (-z_P);$$

$$a'_x (z_P) = -a'_x (-z_P); \quad a'_y (z_P) = -a'_y (-z_P); \quad a'_z (z_P) = a'_z (-z_P)$$

en

$$b'''_x (z_P) = b'''_x (-z_P); \quad b'''_y (z_P) = b'''_y (-z_P);$$

$$b''_x (z_P) = -b''_x (-z_P); \quad b''_y (z_P) = -b''_y (-z_P); \quad b''_z (z_P) = b''_z - z_P);$$

$$b'_x (z_P) = b'_x (-z_P); \quad b'_y (z_P) = b'_y (-z_P); \quad b'_z (z_P) = -b'_z (-z_P).$$

Neemt men $z_P > 0$, dan volgt uit deze relaties, daar voor $z_P < 0$ het linkerlid van (3.1) gelijk aan nul wordt,

$$a'_x (-z_P) = b'_x (-z_P); \quad a'_y (-z_P) = b'_y (-z_P); \quad a'_z (-z_P) = b'_z (-z_P)$$

dus

$$a'_x (z_P) = -b'_x (z_P); \quad a'_y (z_P) = -b'_y (-z_P); \quad a'_z (z_P) = -b'_z (z_P)$$

Hieruit volgt voor $z_P > 0$

$$\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds = -\frac{1}{\mu} \nabla_P \times \nabla_P \times \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds \tag{3.3}$$

Op analoge wijze blijkt, dat, eveneens voor $z_P > 0$, geldt

$$\nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds = \frac{1}{\varepsilon} \nabla_P \times \nabla_P \times \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds \tag{3.4}$$

Hiermede worden (3.1) en (3.2) voor $z_P > 0$

$$2\pi \frac{\partial \vec{H}_P}{\partial t} = \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{H}_0^*}{r} \right) ds \tag{3.5}$$

$$2\pi \frac{\partial \vec{E}_P}{\partial t} = \nabla_P \times \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(\vec{n}_0 \times \frac{\vec{E}_0^*}{r} \right) ds \tag{3.6}$$

Indien de exacte waarden van $\vec{n}_0 \times \vec{H}_0$ en $\vec{n}_0 \times \vec{E}_0$ in (3.5) en (3.6) worden gesubstitueerd, zijn de hiermede verkregen resultaten exact. (3.5) en (3.6) zijn de uitdrukkingen, waarvan Bethe [5]) en Smythe [6]) bij hun berekeningen gebruik hebben gemaakt.

Literatuurlijst

1) B. B. Baker and E. T. Copson, „The Mathematical Theory of Huygens' Principle", Oxford, 1950, p. 122.
2) J. Meixner und W. Andrejewski, Strenge Theorie der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe und an der kreisförmigen Öffnung im vollkommen leitenden ebenen Schirm. — Ann. Physik **7**, 157-168, (1950).
3) A. G. Clavier, Modern Demonstration of MacDonald's Equivalence Theorem. - Electr. Comm. **25**, 148, (1948).
4) J. A. Stratton, „Electromagnetic Theory", McGraw-Hill, 1941, p. 466.
5) H. A. Bethe, Theory of Diffraction by small Holes. — Phys. Rev. **66**, 163, (1944).
6) W. R. Smythe, The Double Current Sheet in Diffraction. — Phys. Rev. **72**, 1066, (1947).
7) H. Levine and J. Schwinger, On the Theory of Electromagnetic Wave Diffraction by an Aperture in an infinite plane conducting Screen. — Comm. Pure and Appl. Math. **3**, 355, (1950).
8) J. A. Stratton and L. J. Chu, Diffraction Theory of Electromagnetic Waves. — Phys. Rev. **56**, 99, (1939).