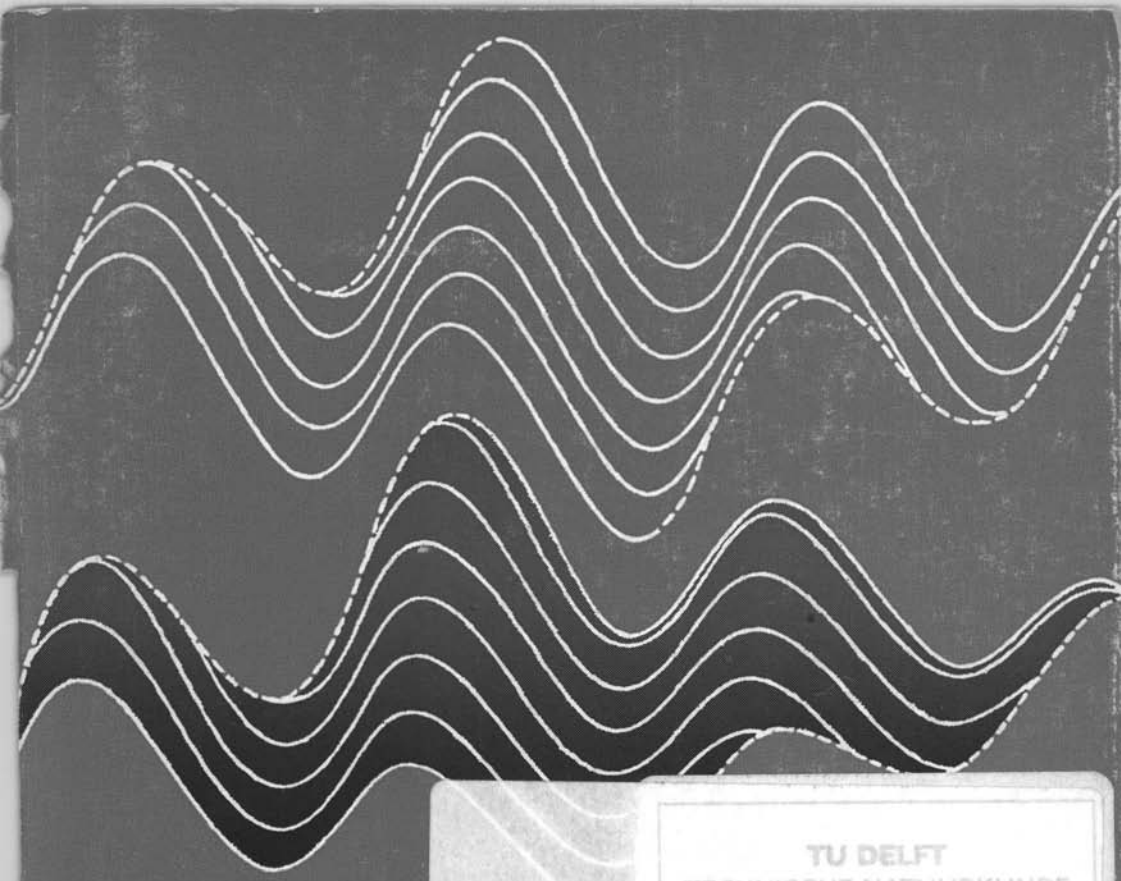


TU DELFT
TECHNISCHE NATUURKUNDE
BIBLIOTHEEK
Lorentzweg 1
2628 CJ DELFT

A. T. DE HOOP

theorie van het
ktromagnetische
d

DELFTSE UNIVERSITAIRE PERS

Theorie van het elektromagnetische veld

UT B 84. X

TU DELFT
TECHNISCHE NATUURKUNDE
BIBLIOTHEEK
Lorentzweg 1
2628 CJ DELFT

2444
711
7

Bibliotheek TU Delft
C 0003815594

J. A. Sketelaar
Delft 01-76

UT B 84.X

Theorie van het elektromagnetische veld

met toepassingen uit
de telecommunicatietechniek,
de fysische elektronica en
de optica

Prof. Dr. Ir. A.T. de Hoop

hoogleraar aan de
Technische Hogeschool te Delft

TU DELFT
TECHNISCHE NATUURKUNDE
BIBLIOTHEEK
Lorentzweg 1
2628 CJ DELFT

Delftse Universitaire Pers/1975

Voor de Delftse Universitaire Pers gepubliceerd door Nijgh-Wolters-Noordhoff Universitaire Uitgevers BV te Rotterdam.

Copyright © 1975 by Nijgh-Wolters-Noordhoff Universitaire Uitgevers BV, Rotterdam.
No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.
Voor alle kwesties inzake het kopiëren van een of meer pagina's van deze uitgave: Stichting Reprorecht, Amsterdam.

ISBN 90 298 1206 00

Aan *Louise Henriette*
Aan *Fridoline Roberta* en
Maarten Valentijn

Inhoudsopgave

Woord vooraf XIII

Handleiding bij het gebruik XV

1. Inleiding 1

2. Ladingsdichtheid, stroomdichtheid, wet van behoud van lading 6

3. Diffusiestroom 16
   (a) Diffusie van instantaan, in een punt geïnjecteerde deeltjes (driedimensionaal probleem) 18
   (b) Diffusie van instantaan, in een vlak geïnjecteerde deeltjes (eendimensionaal probleem) 21

4. Elektrisch moment en magnetisch moment van een stelsel geladen deeltjes 28

5. Kracht en koppel op een stelsel ladingen. De elektromagnetische veldvectoren in vacuüm 36

6. Beweging van een elektrisch geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld 43
   (a) Beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, elektrisch veld 45
   (b) Beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, magnetisch veld 46

7. De elektromagnetische veldvergelijkingen in vacuüm 50

8. De elektromagnetische veldvergelijkingen bij aanwezigheid van geladen deeltjes 54

9. De elektromagnetische veldvergelijkingen in een materieel medium 62

10. De elektromagnetische constitutieve vergelijkingen 67

11. De randvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee verschillende media 76
(a) Elektrisch ondoordringbaar voorwerp 80
(b) Magnetisch ondoordringbaar voorwerp 81

12. Uitwisseling van energie in het elektromagnetische veld 84

13. Beknopte theorie van de warmtegeleiding 93
(a) Grondvergelijkingen van de theorie van de warmtegeleiding 93
(b) Constitutieve vergelijking voor de warmtegeleiding 96
(c) Randvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee verschillende media 96

14. Stationaire elektrische stroming in een elektrisch geleidende configuratie 104
(a) Grondvergelijkingen voor de theorie van de stationaire elektrische stroming 105
(b) Constitutieve vergelijking voor het elektrisch geleidende materiaal 106
(c) De differentiaalvergelijking voor de elektrische potentiaal 107
(d) Randvoorwaarden aan een oppervlak waar de soortelijke geleiding een sprong vertoont 108
(e) Randvoorwaarden op het randoppervlak van de configuratie 108
(f) Gegeneraliseerde stelling van TELLEGEN 109
(g) Toegevoerd elektromagnetisch vermogen en ontwikkelde hoeveelheid warmte 111
(h) Eenduidigheidsstelling 112
(i) Superpositiestelling 115
(j) Conductantiematrix en weerstandsmatrix 116
(k) Reciprociteitsstelling 118
(l) Berekening van het veldpatroon in de configuratie 119

15. Sinusvormig met de tijd veranderende elektromagnetische velden. De complexe rekenwijze 122

16. Analyse en synthese volgens FOURIER. Veldgrootheden als functie van de tijd 131
(a) In de tijd periodieke veldgrootheden 131
(b) In de tijd voorbijgaande veldgrootheden 134

(c) Veldgrootheden, opgebouwd uit bijdragen van gegeven discrete frequenties 136

17. Analyse en synthese volgens FOURIER. Veldgrootheden als functie van de plaats in de ruimte 141
(a) In de ruimte periodieke veldgrootheden 141
(b) In de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden 145

18. De elektromagnetische veldvergelijkingen, de constitutieve vergelijkingen, de randvoorwaarden en de vermogensbalans in het frequentiedomein 150
(a) De elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein 150
(b) De constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein 152
(c) De randvoorwaarden in het frequentiedomein 153
(d) De vermogensbalans in het frequentiedomein 153

19. Complexe soortelijke geleiding, permittiviteit en permeabiliteit. Nawerking, causaliteit. De betrekkingen van KRAMERS en KRONIG 158
(a) Complexe soortelijke geleiding 164
(b) Complexe permittiviteit 165
(c) Complexe permeabiliteit 165

20. Eendimensionale elektromagnetische golven in vacuüm (analyse in het tijddomein) 169

21. Eendimensionale elektromagnetische golven in het frequentiedomein. Verstrooiingsmatrix en overdrachtsmatrix van een uniforme sectie van een medium 175
(a) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma' = 0$, $\sigma'' = 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu' > 0$, $\mu'' = 0$ 184
(b) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma' > 0$, $\sigma'' = 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu' > 0$, $\mu'' = 0$ 186
(c) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_p(\omega)$, $\mu = \mu_0$ 188
(d) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_a(\omega)$, $\mu = \mu_0$ 191
(e) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma = \sigma_m(\omega)$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ 194
(f) Medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_e(\omega)$, $\mu = \mu_0$ 198

22. De elektrische vlakkeplaatantenne met uniforme stroomverdeling 205
(a) Het deelveld $\{E_x, H_y\}$ dat wordt opgewekt door j_x 206
(b) Het deelveld $\{E_y, H_x\}$ dat wordt opgewekt door j_y 208

23. Reflectie tegen en transmissie door een plat scheidingsvlak tussen twee media. Overdrachtsmatrix en verstrooiingsmatrix voor eendimensionale elektromagnetische golven 210
(a) Analyse op basis van de elektrische veldsterkte 214
(b) Analyse op basis van de magnetische veldsterkte 216

24. Overdrachtseigenschappen van een gelaagd medium (eendimensionale elektromagnetische golven) 224
(a) Analyse op basis van de elektrische veldsterkte 228
(b) Analyse op basis van de magnetische veldsterkte 228

25. Vrije elektromagnetische trillingen in een resonator (eendimensionale velden) 240
(a) FABRY-PEROT resonator, gevuld met een medium waarvoor $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, waarin ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn 251
(b) FABRY-PEROT resonator, gevuld met een medium waarvoor $\hat{\sigma} = \sigma$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, waarin σ, ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn 252
(c) FABRY-PEROT resonator, gevuld met een botsingsvrij plasma 254

26. Driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven in het frequentiedomein. Uniforme en niet-uniforme vlakke golven 258
(a) Lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte 264
(b) Lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte 265
(c) Uniforme vlakke golf 266
(d) Propagatie in een medium waarvoor $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn 267
(e) Propagatie in een medium waarvoor σ, ε en μ reëel en positief zijn 269
(f) Propagatie in een botsingsvrij plasma, waarvoor $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_p(\omega)$ en $\mu = \mu_0$ 270

27. Interferentie van twee vlakke, elektromagnetische golven met gelijke cirkelfrequenties 273
(a) Lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte (uniforme vlakke golven) 275

(b) Lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte (uniforme vlakke golven) 279

28. Betrekkingen tussen de componenten van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf bij gebruik van een coördinatenstelsel dat aan de configuratie is aangepast 284

29. Reflectie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp 289
(a) Elektrische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het grensvlak 292
(b) Magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het grensvlak 293
(c) Reflectie van een uniforme, vlakke, invallende golf. De wet van SNEL (SNELLIUS) 293
(d) Reflectie van een uniforme, vlakke golf in een medium waarvoor $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn 295

30. Reflectie en transmissie van driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven door een plat scheidingsvlak tussen twee media 297
(a) Voortplantingseigenschappen van de golven. De wetten van SNEL (SNELLIUS) voor de terugkaatsing en de breking van uniforme, vlakke golven 300
(b) Elektrische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het scheidingsvlak. De reflectiefactor van FRESNEL voor *E*-polarisatie 304
(c) Magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het scheidingsvlak. De reflectiefactor van FRESNEL voor *H*-polarisatie 307
(d) Betrekkingen tussen de *z*-componenten van de elektrische veldsterkte voor het algemene geval 310
(e) Betrekkingen tussen de *z*-componenten van de magnetische veldsterkte voor het algemene geval 311
(f) Betrekkingen tussen de transversale componenten van de elektrische veldsterkte voor het algemene geval 311
(g) Betrekkingen tussen de transversale componenten van de magnetische veldsterkte voor het algemene geval 313

31. Elektromagnetische stralen in het frequentiedomein 316
(a) De baan van een uniforme, elektromagnetische straal 320

(b) Het transport van vermogen langs een uniforme, elektromagnetische straal 322

32. Uniforme, elektromagnetische stralen in een horizontaal gelaagd medium 325

33. Uniforme, elektromagnetische stralen in een sferisch gelaagd medium 330

Aanhangsel A: Vectoralgebra 333

Aanhangsel B: Vectoranalyse 335
(a) Differentiëren en integreren naar een parameter 335
(b) Differentiëren naar de plaatscoördinaten 335
(c) Integraalstellingen 337

Aanhangsel C: Rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal 339

Register 341

Woord vooraf

In dit boek kunnen drie onderdelen worden onderscheiden: een deel dat de grondslagen van de theorie van het elektromagnetische veld behandelt, een deel dat in beknopte vorm de theorie van de diffusie en de theorie van de warmtegeleiding bespreekt en een deel waarin een aantal elektromagnetische verschijnselen (voornamelijk golfverschijnselen in diverse configuraties) aan de orde komen.

Ofschoon de theorie wordt ontwikkeld met het oog op de toepassingen op macroscopische schaal, is vaak een microscopische beschrijving als uitgangspunt voor het invoeren van de verschillende fundamentele grootheden gekozen. De opbouw is tamelijk axiomatisch, zowel in natuurkundig als in wiskundig opzicht. Dit brengt met zich mee, dat de lijn van het betoog vaak strakker is dan in vele andere boeken op ons vakgebied.

Er is duidelijk gebroken met de traditie om met de behandeling van de elektrostatica te beginnen, daarna het magnetische veld van stationaire stromen in te voeren, om vervolgens tot het elektromagnetische veld in het algemeen te geraken. Van de aanvang af wordt ondersteld, dat de optredende veldgrootheden zowel in de ruimte als in de tijd variëren.

In de toepassingen komen de volgende onderwerpen aan de orde: eenvoudige gevallen van diffusie van ladingdragers, eenvoudige warmtegeleidingsvraagstukken, vlakke elektromagnetische golven in uiteenlopende configuraties en elektromagnetische stralen.

Het benodigde wiskundige gereedschap is elementair. Wel wordt ondersteld, dat de lezer over enige vaardigheid beschikt in het hanteren van de vectoralgebra en de vectoranalyse in de driedimensionale ruimte. De in de tekst gebruikte formules hieruit zijn in een aanhangsel opgenomen.

Door het gehele boek heen zijn SI-eenheden gebruikt. Veel zorg is besteed aan het opnemen van de meest recente internationale normalisatie op dit gebied. Hiertoe is geput uit de publikaties van het Nederlands Normalisatie-instituut en de International Electrotechnical Commission.

Het boek is een leerboek en heeft het karakter van een inleiding in de theorie van het elektromagnetische veld. Na de behandeling van de algemene problematiek van een onderdeel van de stof volgen in iedere paragraaf toepassingen en eventueel een verwijzing naar de vakliteratuur voor de voortgezette behandeling van het onderwerp. Tevens bevat iedere paragraaf een aantal vraagstukken. Deze geven een verdere toelichting op of toepassing van de stof en vormen een integrerend deel ervan; zij hebben zelden het karakter van een invuloefening. Bij ieder vraagstuk is het antwoord opgegeven.

De ervaring die de schrijver heeft in het geven van onderwijs aan de Technische Hogeschool te Delft, heeft een belangrijke invloed gehad op de samenstelling van het boek. De keuze van de inhoud is mede bepaald door de eisen die het programma van de studierichting der elektrotechniek aan het onderwijs in de theorie van het elektromagnetische veld stelt. Behalve voor studenten van de studierichting der elektrotechniek kan het boek van nut zijn voor ieder die zich met de grondslagen van de theorie van het elektromagnetische veld vertrouwd wil maken en kennis wil maken met eenvoudige, doch voor de praktijk belangrijke, toepassingen. In de op p. XV volgende „Handleiding bij het gebruik" is voor iedere paragraaf aangegeven welke plaats de stof ervan in het geheel inneemt.

Veel dank is de schrijver verschuldigd aan een aantal personen die een belangrijke bijdrage aan de totstandkoming van dit boek hebben geleverd. Dr. Ir. H. Blok, lector in de theoretische elektriciteitsleer aan de Technische Hogeschool te Delft en Ir. F. L. Neerhoff, wetenschappelijk medewerker bij het laboratorium voor theoretische elektriciteitsleer van de afdeling der elektrotechniek van genoemde hogeschool, hebben de eerste versie van de tekst grondig doorgenomen. Hun kritiek is van onschatbare waarde geweest en hun voorstellen tot wijziging van de tekst waren evenzovele verbeteringen. Mejuffrouw M. Voortman heeft op voortreffelijke wijze het definitieve manuscript getypt. De heer J. M. van Splunter heeft de verzorging van de illustraties op zich genomen en waar nodig de berekeningen voor de grafieken uitgevoerd. Tenslotte heeft Ir. D. Quak assistentie verleend bij het corrigeren van de drukproeven. De schrijver wil hen gaarne op deze plaats van harte bedanken. In deze dank wil de schrijver ook de Delftse Universitaire Pers betrekken, die de zorg voor de vervaardiging van het boek had en tot een fraai resultaat is gekomen. In het bijzonder gaat zijn dank uit naar de redactiesecretaris Ir. P. A. M. Maas voor de hulp die hij op vele punten heeft geboden.

Het spreekt vanzelf, dat voor iedere onvolkomenheid alleen de schrijver de volledige verantwoording draagt.

Delft, maart 1975 A. T. DE HOOP

Handleiding bij het gebruik

Het boek is ingedeeld in paragrafen, die opeenvolgend genummerd zijn en elk een afgerond deel van de stof behandelen. Binnen een paragraaf zijn belangrijke onderdelen opgenomen onder een apart hoofd dat van een volgletter (a), (b), (c), enzovoorts, is voorzien. Alle formules zijn genummerd en wel als volgt: (nummer van de paragraaf.volgnummer binnen de paragraaf). Op overeenkomstige wijze zijn de vraagstukken genummerd; bij elk vraagstuk is het antwoord opgegeven.

Indien niet de gehele stof binnen de omvang van een bepaalde cursus kan worden ondergebracht, kan het hierna volgende overzicht hulp bieden bij het maken van een keuze uit het beschikbare materiaal. De paragrafen zijn ingedeeld bij de categorie grondslagen of bij de categorie toepassingen. Naar hun aard worden de toepassingen als afkomstig beschouwd uit de telecommunicatietechniek, de fysische elektronica en de materiaalkunde, dan wel de optica. De met * aangeduide paragrafen kunnen bij een beknopte cursus worden overgeslagen.

TELECOMMUNICATIETECHNIEK

Grondslagen

1	2		4	5		7	8
9	10	11	12			15	16*
17*	18	19*					

Toepassingen

			20	21	22	23	24
	26	27	28	29	30	31	32
33							

FYSISCHE ELEKTRONICA EN MATERIAALKUNDE

Grondslagen

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16*
17*	18	19*					

Toepassingen

			20	21		23	24
25	26		28		30		

OPTICA

Grondslagen

1	2		4	5		7	8
9	10	11	12			15	16*
17*	18	19*					

Toepassingen

			20	21		23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33							

De voor de behandeling van de stof benodigde formules uit de vectoralgebra en de vectoranalyse zijn opgenomen in een aanhangsel.

1. Inleiding

De theorie van het elektromagnetische veld is het onderdeel van de theoretische natuurkunde dat zich met het bestuderen van elektromagnetische verschijnselen bezighoudt. Elektromagnetische verschijnselen kunnen zowel in vacuüm als in de materie optreden, in tegenstelling tot b.v. geluidstrillingen, die alleen in de materie en niet in vacuüm kunnen optreden. Ons doel is de theorie van het elektromagnetische veld te gebruiken voor het analyseren van een aantal configuraties die toepassing vinden in de elektrotechniek. Met name zal aan elektromagnetische golfverschijnselen in de telecommunicatietechniek en de elektronica (o.a. in geïntegreerde schakelingen) aandacht worden besteed. In de genoemde gevallen heeft men doorgaans te maken met elektromagnetische verschijnselen op macroscopische schaal. Dit houdt in, dat er steeds grote aantallen elementaire bouwstenen van de materie bij de verschijnselen zijn betrokken en dat in de golfverschijnselen de getransporteerde energie steeds uit een groot aantal elementaire energiequanta bestaat. Op grond van deze overwegingen kunnen wij volstaan met de behandeling van de theorie van het elektromagnetische veld op macroscopische schaal. Ter verheldering van het fysische beeld zal echter – waar dit nuttig is – de atomaire structuur van de materie naar voren worden gebracht.

De in de theorie optredende veldgrootheden zijn functies van de plaats van waarnemen in de driedimensionale ruimte en van het tijdstip van waarnemen. Om van een waarnemer die de elektromagnetische verschijnselen bestudeert, de plaats vast te leggen, gebruiken wij een vast, rechtscyclisch (b.v. Cartesiaans) assenstelsel. De Cartesiaanse coördinaten van een punt in de ruimte geven wij aan met x, y en z. De eenheidsvectoren langs de x-, de y- en de z-as geven wij aan met respectievelijk $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ en $\mathbf{i}_z$; zij vormen in deze volgorde een rechts-cyclisch stelsel. De tijdcoördinaat wordt aangegeven met t. Om x, y en z te kunnen meten, heeft de waarnemer een standaardmeetlat nodig; om t te kunnen meten, moet hem een standaardklok ter beschikking staan (Fig. 1). Ter bekorting zal de plaats

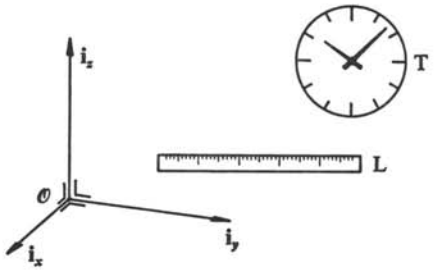


Fig. 1. Waarnemer in de driedimensionale ruimte, met standaardmeetlat L *en standaardklok* T.

in de ruimte vaak aangegeven worden met de plaatsvector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z\,, \tag{1.1}$$

die op ondubbelzinnige wijze met x, y en z samenhangt (Fig. 2).

Een algemeen kenmerk van de grootheden in een macroscopische theorie is, dat zij stuksgewijs continue en stuksgewijs continu differentieerbare functies van x, y, z en t zijn. De partiële differentiaties naar x, y en z zullen wij aangeven met respectievelijk de operatoren ∂_x, ∂_y en ∂_z; de partiële differentiatie naar t zullen wij aangeven met de operator ∂_t. In een aantal gevallen is het voordelig de partiële differentiaties naar x, y en z samen te vatten in de vectoriële nabla-operator

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}_x\partial_x + \mathbf{i}_y\partial_y + \mathbf{i}_z\partial_z\,. \tag{1.2}$$

(In sommige verhandelingen schrijft men ook wel ∂ in plaats van $\mathbf{V}$.)

Wij zullen onze beschouwingen beperken tot het geval dat de aanwezige materiële voorwerpen ten opzichte van elkaar niet bewegen. Het hierboven

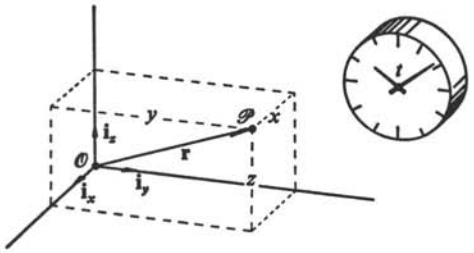


Fig. 2. Waarnemer in de driedimensionale ruimte, met rechts-cyclische Cartesiaanse coördinaten x, y *en* z, *plaatsvector* $\mathbf{r}$ *en tijd* t.

ingevoerde vaste assenstelsel wordt dan zodanig gekozen, dat het ten opzichte van de materiële voorwerpen in rust is: wij vatten deze keuze samen door te zeggen, dat de materie in rust verkeert. Als wij de genoemde onderstelling niet zouden maken, zou het ontwikkelen van de theorie van het elektromagnetische veld aanzienlijk gecompliceerder verlopen. Een van de moeilijkheden is gelegen in de omstandigheid, dat het formuleren van de elektromagnetische eigenschappen van het materiaal waaruit een voorwerp bestaat, een moeilijk vraagstuk is voor een waarnemer die ten opzichte van dit voorwerp beweegt. De bestudering van de elektromagnetische verschijnselen onder zulke omstandigheden is het onderwerp van de (speciale) relativiteitstheorie. Hiervoor verwijzen wij naar MØLLER[1].

De experimentele basis voor de theorie van het elektromagnetische veld is gelegen in een aantal proefondervindelijk opgestelde wetten, die door James Clerk MAXWELL zijn samengevat in de naar hem genoemde twee wetten („eerste" en „tweede wet van MAXWELL"). Voor een historisch overzicht van de ontwikkeling van de theorie verwijzen wij naar WHITTAKER[2]. In dit verband noemen wij ook de eerste druk van het boek van MAXWELL[3].

Uitgangspunt voor onze beschouwingen zijn de elektromagnetische verschijnselen in vacuüm en hun samenhang met de beweging van geladen deeltjes. Daarna worden materiële media in de theorie ingevoerd. Dit geschiedt op tamelijk axiomatische wijze, hetgeen voor een macroscopische theorie de meest consequente opzet is. De nadruk ligt hierbij op het opstellen van een consistent geheel van grondvergelijkingen. In het gedeelte dat de grondslagen van de theorie behandelt, komen als voornaamste onderwerpen aan de orde:

(a) de elektromagnetische veldvergelijkingen in vacuüm,

(b) de elektromagnetische veldvergelijkingen in een materieel medium,

(c) de elektromagnetische constitutieve vergelijkingen (deze beschrijven het elektromagnetische gedrag van een medium),

(d) de rand- of grensvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee media die zich in elektromagnetisch opzicht verschillend gedragen,

(e) de uitwisseling van energie in het elektromagnetische veld.

1. MØLLER, C., *The theory of relativity*. 2nd. ed., Oxford, Clarendon Press, 1972.
2. WHITTAKER, E. T., *A history of the theories of aether and electricity*. London, Nelson. Vol. I. *Classical theories*, 1951, Vol. II. *Modern theories* (1900–1926), 1953.
3. MAXWELL, J. C., *A treatise on electricity and magnetism*. Oxford, Clarendon Press, 1873.

De formulering van deze grondslagen stelt ons in staat ieder elektromagnetisch probleem in wiskundige vorm te gieten; daarna kan het – althans in beginsel – worden opgelost.

Als voornaamste wiskundig gereedschap voor het overzichtelijk hanteren van de grondvergelijkingen van de theorie van het elektromagnetische veld dient de vectoranalyse. (Soms dienen ook tensoren in de beschouwing te worden betrokken.) Met het oog hierop is in het Aanhangsel onder A. Vectoralgebra en B. Vectoranalyse een overzicht van de belangrijkste formules uit de vectorrekening opgenomen.

Als eenhedenstelsel gebruiken wij het Internationale Stelsel van Eenheden, bij afkorting het SI genoemd (International System of Units, Système International d'Unités). Dit stelsel is op zes grondeenheden gebaseerd, nl. de meter (m), het kilogram (kg), de seconde (s), de ampère (A), de kelvin (K) en de candela (cd) als eenheid van respectievelijk lengte, massa, tijd, elektrische stroom, (thermodynamische) temperatuur en lichtsterkte. De in dit stelsel optredende eenheden worden SI-eenheden genoemd. De norm NEN 950 van het Nederlands Normalisatie-instituut geeft een uiteenzetting over de grondslagen van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI), over de grootheden die met deze eenheden worden gemeten en over de vergelijkingen waarin de betrekkingen tussen deze grootheden zijn vastgelegd. Tabel 1 geeft een overzicht van de

Tabel 1. Basisgrootheden, grondeenheden en gronddimensies van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Basisgrootheid		*Grondeenheid*		*Gronddimensie*
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*	*symbool*
lengte	l	meter	m	L
massa	m	kilogram	kg	M
tijd	t	seconde	s	T
elektrische stroom	I	ampère	A	I
(thermodynamische) temperatuur	T	kelvin	K	Θ
lichtsterkte	I	candela	cd	J

basisgrootheden, de grondeenheden en de gronddimensies van de grootheidsoorten van het SI. Wat de symbolen voor de eenheden betreft, gebruiken wij de genormaliseerde schrijfwijze. Deze houdt in, dat negatieve machten van een eenheid worden vermeden door toepassing van

een schuine breukstreep; de schuine breukstreep wordt niet toegepast als uitsluitend negatieve machten optreden (voorbeeld: m/s voor „meter per seconde", maar s^{-1} voor „per seconde").

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 1.1. Laten $x_{\mathscr{P}}$, $y_{\mathscr{P}}$ en $z_{\mathscr{P}}$ de Cartesiaanse coördinaten zijn van een punt $\mathscr{P}$ in de driedimensionale ruimte en noem $\mathbf{r}_{\mathscr{P}} = x_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_x + y_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_y + z_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_z$ de plaatsvector van $\mathscr{O}$ naar $\mathscr{P}$. Geef twee uitdrukkingen voor de afstand $d(\mathscr{O}, \mathscr{P})$ van $\mathscr{O}$ naar $\mathscr{P}$.
Antwoord: (a) $d(\mathscr{O}, \mathscr{P}) = (x_{\mathscr{P}}^2 + y_{\mathscr{P}}^2 + z_{\mathscr{P}}^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$; (b) $d(\mathscr{O}, \mathscr{P}) = (\mathbf{r}_{\mathscr{P}} \cdot \mathbf{r}_{\mathscr{P}})^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

Vraagstuk 1.2. Laten $x_{\mathscr{P}}$, $y_{\mathscr{P}}$ en $z_{\mathscr{P}}$ de Cartesiaanse coördinaten van een punt $\mathscr{P}$ en $x_{\mathscr{Q}}$, $y_{\mathscr{Q}}$ en $z_{\mathscr{Q}}$ de Cartesiaanse coördinaten van een punt $\mathscr{Q}$ in de driedimensionale ruimte zijn. Noem $\mathbf{r}_{\mathscr{P}}$ de plaatsvector van $\mathscr{O}$ naar $\mathscr{P}$ en $\mathbf{r}_{\mathscr{Q}}$ de plaatsvector van $\mathscr{O}$ naar $\mathscr{Q}$. Geef de uitdrukkingen voor: (a) de plaatsvector $\overrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}}$ van $\mathscr{P}$ naar $\mathscr{Q}$; (b) de plaatsvector $\overrightarrow{\mathscr{Q}\mathscr{P}}$ van $\mathscr{Q}$ naar $\mathscr{P}$; (c) de afstand $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$.
Antwoord: (a) $\overrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \mathbf{r}_{\mathscr{Q}} - \mathbf{r}_{\mathscr{P}}$; (b) $\overrightarrow{\mathscr{Q}\mathscr{P}} = \mathbf{r}_{\mathscr{P}} - \mathbf{r}_{\mathscr{Q}}$; (c) $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = [(x_{\mathscr{Q}} - x_{\mathscr{P}})^2 + (y_{\mathscr{Q}} - y_{\mathscr{P}})^2 + (z_{\mathscr{Q}} - z_{\mathscr{P}})^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ of $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = [(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}} - \mathbf{r}_{\mathscr{P}}) \cdot (\mathbf{r}_{\mathscr{Q}} - \mathbf{r}_{\mathscr{P}})]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ of $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = [\mathbf{r}_{\mathscr{Q}} \cdot \mathbf{r}_{\mathscr{Q}} - 2\mathbf{r}_{\mathscr{Q}} \cdot \mathbf{r}_{\mathscr{P}} + \mathbf{r}_{\mathscr{P}} \cdot \mathbf{r}_{\mathscr{P}}]^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

Vraagstuk 1.3. Waar gaat het antwoord van Vraagstuk 1.2 onder (c) in over als $x_{\mathscr{P}} = 0$, $y_{\mathscr{P}} = 0$, $z_{\mathscr{P}} \neq 0$ en $x_{\mathscr{Q}} = 0$, $y_{\mathscr{Q}} = 0$, $z_{\mathscr{Q}} \neq 0$?
Antwoord: $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = |z_{\mathscr{Q}} - z_{\mathscr{P}}|$, d.w.z. $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = z_{\mathscr{Q}} - z_{\mathscr{P}}$ als $z_{\mathscr{P}} < z_{\mathscr{Q}}$ en $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = -z_{\mathscr{Q}} + z_{\mathscr{P}}$ als $z_{\mathscr{Q}} < z_{\mathscr{P}}$ of $d(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = \max(z_{\mathscr{P}}, z_{\mathscr{Q}}) - \min(z_{\mathscr{P}}, z_{\mathscr{Q}})$.

Vraagstuk 1.4. Bepaal $\partial_x \mathbf{r}$, $\partial_y \mathbf{r}$ en $\partial_z \mathbf{r}$, waarin $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$.
Antwoord: $\partial_x \mathbf{r} = \mathbf{i}_x$; $\partial_y \mathbf{r} = \mathbf{i}_y$; $\partial_z \mathbf{r} = \mathbf{i}_z$.

Vraagstuk 1.5. Bepaal $\partial_x R$, $\partial_y R$ en $\partial_z R$, waarin $R = [(x - x_{\mathscr{P}})^2 + (y - y_{\mathscr{P}})^2 + (z - z_{\mathscr{P}})^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$.
Antwoord: $\partial_x R = (x - x_{\mathscr{P}})/R$; $\partial_y R = (y - y_{\mathscr{P}})/R$; $\partial_z R = (z - z_{\mathscr{P}})/R$.

Vraagstuk 1.6. Bepaal $\partial_{x_{\mathscr{P}}} R$, $\partial_{y_{\mathscr{P}}} R$ en $\partial_{z_{\mathscr{P}}} R$, waarin $R = [(x - x_{\mathscr{P}})^2 + (y - y_{\mathscr{P}})^2 + (z - z_{\mathscr{P}})^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$.
Antwoord: $\partial_{x_{\mathscr{P}}} R = (x_{\mathscr{P}} - x)/R$; $\partial_{y_{\mathscr{P}}} R = (y_{\mathscr{P}} - y)/R$; $\partial_{z_{\mathscr{P}}} R = (z_{\mathscr{P}} - z)/R$.

Vraagstuk 1.7. Bepaal ∇R en $\nabla_{\mathscr{P}} R$, waarin $R = [(x - x_{\mathscr{P}})^2 + (y - y_{\mathscr{P}})^2 + (z - z_{\mathscr{P}})^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ en $\nabla_{\mathscr{P}} = \mathbf{i}_x \partial_{x_{\mathscr{P}}} + \mathbf{i}_y \partial_{y_{\mathscr{P}}} + \mathbf{i}_z \partial_{z_{\mathscr{P}}}$.
Antwoord: $\nabla R = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathscr{P}})/R$ en $\nabla_{\mathscr{P}} R = (\mathbf{r}_{\mathscr{P}} - \mathbf{r})/R$, met $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$ en $\mathbf{r}_{\mathscr{P}} = x_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_x + y_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_y + z_{\mathscr{P}}\mathbf{i}_z$.

2. Ladingsdichtheid, stroomdichtheid, wet van behoud van lading

Om de macroscopische begrippen (elektrische) ladingsdichtheid en (elektrische) stroomdichtheid in te voeren, gaan wij na tot welke gemiddelde effecten op grote schaal de aanwezigheid van een zwerm bewegende, elektrisch geladen deeltjes aanleiding geeft. Wij onderstellen, dat de afmetingen van de deeltjes verwaarloosbaar klein zijn ten opzichte van hun onderlinge afstand en noemen de deeltjes dan *puntvormig*. Wat mechanische eigenschappen betreft, is een puntvormig deeltje gekenmerkt door zijn (rust)massa m_0, zijn plaats in de ruimte $\mathbf{r}$, zijn snelheid $\mathbf{v}$ en zijn impulsmoment $\mathbf{b}$. Dit impulsmoment wordt veroorzaakt door de rotatie van het deeltje om zijn as. Wat elektromagnetische eigenschappen betreft, blijkt een puntvormig deeltje, behalve wederom door zijn plaats, gekenmerkt te zijn door zijn (elektrische) lading q en zijn magnetisch (spin)-moment $\mathbf{m}$. Ook dit magnetisch (spin)moment wordt veroorzaakt door de rotatie van het deeltje om zijn as. Uit experimenten blijkt, dat voor alle deeltjes $m_0>0$; voor q is dit niet het geval: voor een positief geladen deeltje (b.v. proton) is $q>0$, voor een negatief geladen deeltje (b.v. elektron) is $q<0$, terwijl voor een neutraal deeltje (b.v. neutron) geldt $q=0$. Proefondervindelijk is vastgesteld, dat de hoeveelheid elektrische lading discreet of gequantiseerd is: als $-e$ de lading van een elektron voorstelt, blijkt de lading van een willekeurig deeltje altijd een veelvoud van e te bedragen. Uit experimenten blijkt, dat

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ coulomb.}$$

Alvorens de macroscopische eigenschappen van een zwerm bewegende, elektrisch geladen deeltjes te bestuderen, zullen wij een aantal macroscopische grootheden invoeren die verband houden met de beweging van een zwerm *willekeurige deeltjes*. Daartoe beschouwen wij een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte, waarin zich een zwerm bewegende deeltjes bevindt. Laat ΔV de inhoud zijn van een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathscr{V}$ van $\mathscr{V}$ dat een gekozen punt van waarneming met Cartesiaanse coördinaten x, y en z en plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat. Verder voeren wij een standaard-

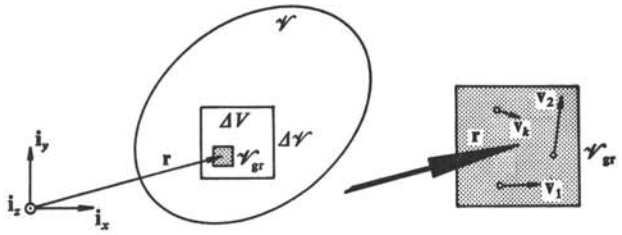


Fig. 3. Concentratie en convectiesnelheid van een zwerm deeltjes ($\mathscr{V}_{gr}$ is een kleinste korrel van de beschouwde zwerm deeltjes).

gebiedje $\mathscr{V}_{gr}$ in met als kenmerk, dat de maximale diameter klein is ten opzichte van de afmetingen van het beschouwde macroscopische systeem, terwijl de minimale diameter altijd zo groot blijft, dat $\mathscr{V}_{gr}$ zeer vele deeltjes bevat (Fig. 3). $\mathscr{V}_{gr}$ is op te vatten als de kleinste korrel (Eng.: grain) materiaal waarop de macroscopische fysische wetten nog van toepassing zijn. Verder veronderstellen wij, dat de fysische eigenschappen van een brok materiaal dat uit zulke korrels is opgebouwd, continu met de plaats in de ruimte veranderen („continuümshypothese"). Het is duidelijk, dat bij deze beschrijvingswijze wordt afgezien van het discreet zijn van de elementaire bouwstenen van de materie.

Laat nu ΔN het aantal op het tijdstip t in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes zijn. Als *concentratie* $N = N(\mathbf{r},t)$ van de deeltjes op het tijdstip t en in het punt van waarneming met plaatsvector $\mathbf{r}$ voeren wij in

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} \Delta N/\Delta V, \tag{2.1}$$

waarbij $\mathbf{r}$ een inwendig punt van $\mathscr{V}_{gr}$ blijft. Op grond van de continuümshypothese is $N = N(\mathbf{r},t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$.

Opmerking. Ter bekorting hebben wij $N(\mathbf{r},t)$ geschreven in plaats van $N(x,y,z,t)$. Deze notatie, die in de natuurkunde veel wordt toegepast, zullen wij overal gebruiken waar het onderscheid tussen x, y en z voor het resultaat niet wezenlijk is.

Met behulp van de definitie (2.1) is voor het totale aantal $n = n(t)$ op het tijdstip t in $\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes te schrijven

$$n = \iiint_{\mathscr{V}} N\,\mathrm{d}V, \tag{2.2}$$

waarin $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Vervolgens nummeren wij de in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes en wel met het rangnummer k ($k = 1, \ldots, \Delta N$). Laat $\mathbf{v}_k$ de snelheid van het deeltje met rangnummer k zijn, dan is de gemiddelde snelheid $\langle \mathbf{v} \rangle$ van de in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes gegeven door

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (\Delta N)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} \mathbf{v}_k . \tag{2.3}$$

Ondersteld wordt nu, dat voor $\Delta\mathscr{V} \to \mathscr{V}_{gr}$ uit (2.3) weer een grootheid ontstaat die een continue functie van $\mathbf{r}$ is. Deze grootheid noemen wij de *convectiesnelheid* $\mathbf{v}_{conv} = \mathbf{v}_{conv}(\mathbf{r}, t)$ van de deeltjes. Derhalve is

$$\mathbf{v}_{conv} = \lim_{\Delta\mathscr{V} \to \mathscr{V}_{gr}} \langle \mathbf{v} \rangle . \tag{2.4}$$

Opgemerkt wordt, dat met de chaotische temperatuurbeweging van de deeltjes een snelheid gepaard gaat waarvan de gemiddelde waarde gelijk is aan de nulvector; deze beweging levert derhalve geen bijdrage tot $\mathbf{v}_{conv}$.

Teneinde een verband tussen N en $\mathbf{v}_{conv}$ op te sporen, kiezen wij in het gebied waar de deeltjes zich bevinden, een vast gesloten oppervlak $\mathscr{S}$; het gebied binnen $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathscr{V}$ (Fig. 4). Het aantal op het tijdstip t in $\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes is op grond van (2.2) gegeven door

$$n(t) = \iiint_{\mathscr{V}} N(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}V. \tag{2.5}$$

Een tijdsinterval Δt later is dit aantal

$$n(t+\Delta t) = \iiint_{\mathscr{V}} N(\mathbf{r}, t+\Delta t)\, \mathrm{d}V. \tag{2.6}$$

Het aantal deeltjes dat in het tijdsverloop Δt door $\mathscr{S}$ heen naar buiten stroomt, wordt in eerste orde benadering in Δt gegeven door

$$(\Delta n)_{conv} = \oiint_{\mathscr{S}} N(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{conv}(\mathbf{r}, t)\, \Delta t\, \mathrm{d}A, \tag{2.7}$$

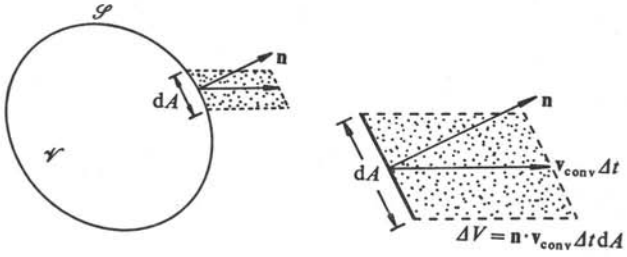


Fig. 4. De wet van behoud van het aantal deeltjes, toegepast op het gebied $\mathscr{V}$ binnen het gesloten oppervlak $\mathscr{S}$.

waarin $\mathbf{n}$ de eenheidsvector langs de naar buiten gerichte normaal op $\mathscr{S}$ voorstelt. Het rechterlid van (2.7) is verkregen door de bijdragen van de afzonderlijke elementen van $\mathscr{S}$ te sommeren en in rekening te brengen, dat de deeltjes die $\mathscr{V}$ door een element van $\mathscr{S}$ heen in het tijdsverloop Δt verlaten, dit gemiddeld met de locale convectiesnelheid $\mathbf{v}_{\text{conv}}(\mathbf{r},t)$ doen en terechtkomen in een cilinder waarvan $\mathrm{d}A$ de oppervlakte van het grondvlak en $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\text{conv}}(\mathbf{r},t)\,\Delta t$ de hoogte is. In ieder tijdsinterval Δt moeten echter de verandering van het aantal deeltjes in $\mathscr{V}$, de stroming van deeltjes door $\mathscr{S}$ heen naar buiten, het onstaan van deeltjes in $\mathscr{V}$ en het tenietgaan van deeltjes in $\mathscr{V}$ met elkaar evenwicht maken. Deze overweging leidt tot de betrekking

$$n(t+\Delta t) - n(t) = -(\Delta n)_{\text{conv}} + (\Delta n)_{\text{cr}} - (\Delta n)_{\text{ann}}, \tag{2.8}$$

waarin $(\Delta n)_{\text{cr}}$ het aantal deeltjes is dat in het tijdsinterval Δt in $\mathscr{V}$ is ontstaan (Eng.: created) en $(\Delta n)_{\text{ann}}$ het aantal deeltjes dat in het tijdsinterval Δt in $\mathscr{V}$ is tenietgegaan (Eng.: annihilated). Delen door Δt in (2.8) en uitvoeren van de limietovergang $\Delta t \to 0$ geeft, onder gebruikmaking van (2.7),

$$\partial_t n + \oiint_{\mathscr{S}} N\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\text{conv}}\,\mathrm{d}A = \Phi_{\text{cr}} - \Phi_{\text{ann}}, \tag{2.9}$$

waarin

$$\Phi_{\text{cr}} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta n)_{\text{cr}}/\Delta t \tag{2.10}$$

het ontstaanstempo van deeltjes in $\mathscr{V}$ voorstelt en

$$\Phi_{\text{ann}} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta n)_{\text{ann}}/\Delta t \tag{2.11}$$

het tenietgaanstempo van deeltjes in $\mathscr{V}$. Verder voeren wij in de concentratie $(\partial_t N)_{\text{cr}}$ van het ontstaanstempo van deeltjes via de betrekking

$$\Phi_{\text{cr}} = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t N)_{\text{cr}}\,\mathrm{d}V \tag{2.12}$$

en de concentratie $(\partial_t N)_{\text{ann}}$ van het tenietgaanstempo van deeltjes via de betrekking

$$\Phi_{\text{ann}} = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t N)_{\text{ann}}\,\mathrm{d}V. \tag{2.13}$$

Substitutie van (2.5), (2.12) en (2.13) in (2.9) leidt tot

$$\iiint_{\mathscr{V}} \partial_t N\,\mathrm{d}V + \oiint_{\mathscr{S}} N\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\text{conv}}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} [(\partial_t N)_{\text{cr}} - (\partial_t N)_{\text{ann}}]\,\mathrm{d}V; \tag{2.14}$$

hierbij is in de eerste term in het linkerlid de volgorde van de operaties $\iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{d}V$ en ∂_t verwisseld. Vergelijking (2.14) is de wiskundige vorm van de *wet van behoud van het aantal deeltjes*; zij geldt voor ieder gesloten oppervlak $\mathscr{S}$. De grootheid $N\mathbf{v}_{\mathrm{conv}}$ wordt de *deeltjesstroomdichtheid* genoemd.

Indien de deeltjesstroomdichtheid een continu differentieerbare functie van de plaatscoördinaten is, is de tweede term in het linkerlid van (2.14) met gebruikmaking van de divergentiestelling van GAUSS (zie (B.39)) te herleiden tot

$$\oiint_{\mathscr{S}} N\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{conv}}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}(N\mathbf{v}_{\mathrm{conv}})\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.15}$$

Na substitutie van (2.15) in (2.14) kunnen de beide termen in het linkerlid onder één integraalteken worden gebracht. Het resultaat is

$$\iiint_{\mathscr{V}} [\partial_t N + \mathrm{div}(N\mathbf{v}_{\mathrm{conv}})]\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathscr{V}} [(\partial_t N)_{\mathrm{cr}} - (\partial_t N)_{\mathrm{ann}}]\,\mathrm{d}V\,. \tag{2.16}$$

Daar (2.16) moet gelden voor ieder gebied $\mathscr{V}$ en de integranden continu zijn ondersteld, leidt (2.16) tot de betrekking

$$\partial_t N + \mathrm{div}(N\mathbf{v}_{\mathrm{conv}}) = (\partial_t N)_{\mathrm{cr}} - (\partial_t N)_{\mathrm{ann}}\,. \tag{2.17}$$

Vergelijking (2.17) staat bekend als de *continuïteitsvergelijking voor de deeltjesstroom.*

Wij keren nu terug tot de eigenschappen van een zwerm *elektrisch geladen deeltjes* die zich in een gebied in de ruimte bevinden en beschouwen wederom een deelgebied $\Delta\mathscr{V}$ met inhoud ΔV. Laat wederom $\mathscr{V}_{\mathrm{gr}}$ een korrel aanduiden met het punt van waarneming (met plaatsvector $\mathbf{r}$) als inwendig punt. De ruimtelijke (elektrische) *ladingsdichtheid* $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ in dit punt wordt dan gedefinieerd als

$$\rho \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{\mathrm{gr}}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} q_k \tag{2.18}$$

en de ruimtelijke (elektrische) *stroomdichtheid* $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ als

$$\mathbf{J} \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{\mathrm{gr}}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} q_k\mathbf{v}_k\,. \tag{2.19}$$

Hierin is q_k de (elektrische) lading van het k-de deeltje en $\mathbf{v}_k$ zijn snelheid. Op grond van de continuümshypothese zijn de aldus gedefinieerde $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ continue functies van de plaatscoördinaten.

Onder gebruikmaking van (2.1) is (2.18) ook te schrijven als

$$\rho = N \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} \langle q \rangle \tag{2.20}$$

en (2.19) als

$$\mathbf{J} = N \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} \langle q\mathbf{v} \rangle, \tag{2.21}$$

waarbij $\langle$„grootheid"$\rangle$ wederom het rekenkundig gemiddelde van „grootheid" aangeeft.

De totale hoeveelheid lading $Q = Q(t)$ die zich ten tijde t in het gebied $\mathscr{V}$ bevindt, is op grond van (2.18) gegeven door

$$Q = \iiint_{\mathscr{V}} \rho \, \mathrm{d}V. \tag{2.22}$$

Wij gaan nu onderscheid maken tussen de verschillende soorten geladen deeltjes (elektronen, protonen, enz.) en kenmerken elke soort door zijn lading. Zij $q^{(\alpha)}$ de lading van een deeltje van de soort α (b.v. $q^{(\text{elektron})} = -e$, $q^{(\text{proton})} = e$), dan is $q_k = q^{(\alpha)}$ voor alle waarden van k die deeltjes van de soort α aangeven. Zij $\Delta N^{(\alpha)}$ het aantal in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes van de soort α. De concentratie $N^{(\alpha)} = N^{(\alpha)}(\mathbf{r}, t)$ van de deeltjes van de soort α is dan gegeven door

$$N^{(\alpha)} = \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} \Delta N^{(\alpha)}/\Delta V, \tag{2.23}$$

de ladingsdichtheid $\rho^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)}(\mathbf{r}, t)$ van de deeltjes van de soort α door

$$\rho^{(\alpha)} = \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N^{(\alpha)}} q^{(\alpha)} = N^{(\alpha)} q^{(\alpha)} \tag{2.24}$$

en de stroomdichtheid $\mathbf{J}^{(\alpha)} = \mathbf{J}^{(\alpha)}(\mathbf{r}, t)$ van de deeltjes van de soort α door

$$\mathbf{J}^{(\alpha)} = \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N^{(\alpha)}} q^{(\alpha)} \mathbf{v}_k^{(\alpha)} = N^{(\alpha)} q^{(\alpha)} \mathbf{v}_{\text{conv}}^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)} \mathbf{v}_{\text{conv}}^{(\alpha)}. \tag{2.25}$$

Voor de algemene definitie van $\mathbf{v}_{\text{conv}}$ wordt verwezen naar (2.4). Tussen $\rho^{(\alpha)}$ en $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ bestaan betrekkingen, die uit (2.14) en (2.17) worden verkregen. Toepassen van (2.14) op de deeltjes van het type α en vermenigvuldigen van het resultaat met $q^{(\alpha)}$ levert, met behulp van (2.24) en (2.25),

$$\iiint_{\mathscr{V}} \partial_t \rho^{(\alpha)} \, \mathrm{d}V + \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{(\alpha)} \, \mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} [(\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\text{cr}} - (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\text{ann}}] \, \mathrm{d}V. \tag{2.26}$$

Toepassen van (2.17) op de deeltjes van het type α en vermenigvuldigen van het resultaat met $q^{(\alpha)}$ levert, met behulp van (2.24) en (2.25),

$$\partial_t \rho^{(\alpha)} + \operatorname{div} \mathbf{J}^{(\alpha)} = (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\mathrm{cr}} - (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\mathrm{ann}} . \tag{2.27}$$

Voor ieder type ladingdrager (elektron, proton, enz.) geldt een vergelijking van de gedaante (2.26), respectievelijk (2.27).

Vervolgens houden wij rekening met het proefondervindelijk gebleken feit, dat er nimmer ergens netto elektrische lading kan ontstaan of verloren kan gaan. (Als er b.v. ergens een elektron ontstaat, moet er tezelfdertijd en op dezelfde plaats b.v. een positief ion met lading e ontstaan; als er ergens een positief ion met lading $2e$ verloren gaat, moeten er tezelfdertijd en op dezelfde plaats 2 elektronen verloren gaan.) Dit houdt in, dat

$$\sum_{\alpha} (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\mathrm{cr}} = 0 \qquad \text{en} \qquad \sum_{\alpha} (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\mathrm{ann}} = 0 \tag{2.28}$$

voor alle $\mathbf{r}$ en t. Door sommering over alle typen ladingdragers wordt dan uit (2.26) verkregen

$$\iiint_{\mathscr{V}} \partial_t \rho \, \mathrm{d}V + \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, \mathrm{d}A = 0 \tag{2.29}$$

en uit (2.27)

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 . \tag{2.30}$$

Hierin is

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho^{(\alpha)}, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} \mathbf{J}^{(\alpha)}. \tag{2.32}$$

Vergelijking (2.29) is de wiskundige vorm van de *wet van behoud van elektrische lading*; deze vergelijking geldt voor ieder gesloten oppervlak $\mathscr{S}$. Vergelijking (2.30) staat bekend als de *continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom*. De stroomdichtheid $\mathbf{J}$, die via (2.32) is samengesteld uit bijdragen van de gedaante $\mathbf{J}^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)}_{\mathrm{conv}}$, wordt ook wel de (elektrische) convectiestroomdichtheid genoemd.

Een deeltjesstroming heet *stationair*, als N, $\mathbf{v}_{\mathrm{conv}}$, $(\partial_t N)_{\mathrm{cr}}$ en $(\partial_t N)_{\mathrm{ann}}$ onafhankelijk zijn van de tijd. Daar dan $\partial_t N = 0$, volgt uit (2.14)

$$\oiint_{\mathscr{S}} N \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{conv}} \, \mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} [(\partial_t N)_{\mathrm{cr}} - (\partial_t N)_{\mathrm{ann}}] \, \mathrm{d}V \tag{2.33}$$

(stationaire stroming)

en uit (2.17)

$$\operatorname{div}(N\mathbf{v}_{\text{conv}}) = (\partial_t N)_{\text{cr}} - (\partial_t N)_{\text{ann}} \quad \text{(stationaire stroming).} \tag{2.34}$$

Voor een stationaire elektrische stroom zijn ρ en $\mathbf{J}$ onafhankelijk van de tijd. Daar dan $\partial_t \rho = 0$, volgt uit (2.29)

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\, dA = 0 \quad \text{(stationaire stroom)} \tag{2.35}$$

en uit (2.30)

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \quad \text{(stationaire stroom).} \tag{2.36}$$

Indien er op macroscopische schaal geen transport van deeltjes optreedt, noemt men de deeltjesverdeling *statisch*; in dit geval is $\mathbf{v}_{\text{conv}} = \mathbf{0}$. Substitutie van $\mathbf{v}_{\text{conv}} = \mathbf{0}$ in (2.17) levert

$$\partial_t N = (\partial_t N)_{\text{cr}} - (\partial_t N)_{\text{ann}}\,. \tag{2.37}$$

Substitutie van $\mathbf{v}^{(\alpha)}_{\text{conv}} = \mathbf{0}$ in (2.25) levert, onder gebruikmaking van (2.32), voor een statische ladingsverdeling het resultaat $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Op grond van (2.30) is dan ρ onafhankelijk van t.

Tot slot zijn in Tabel 2 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 2. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
volume	V	kubieke meter	m^3
concentratie	N	per kubieke meter	m^{-3}
snelheid	$\mathbf{v}$	meter per seconde	m/s
oppervlakte	A	vierkante meter	m^2
ontstaans-/tenietgaanstempo van deeltjes	$\Phi_{\text{cr/ann}}$	per seconde	s^{-1}
concentratie van het ontstaans-/tenietgaanstempo van deeltjes	$(\partial_t N)_{\text{cr/ann}}$	per kubieke meter seconde	$\mathrm{m}^{-3}\mathrm{s}^{-1}$
(elektrische) lading	Q	coulomb	C
(elektrische) ladingsdichtheid	ρ	coulomb per kubieke meter	$\mathrm{C/m}^3$
(elektrische) stroomdichtheid	$\mathbf{J}$	ampère per vierkante meter	$\mathrm{A/m}^2$
(elektrische) stroom	I	ampère	A

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 2.1. In een zwerm deeltjes met concentratie N wordt een gebied beschouwd in de vorm van een kubus met ribbe a. (a) Hoe groot moet a worden gekozen, opdat de kubus gemiddeld één deeltje bevat? Bereken a, als (b) $N = 2.69 \times 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}$ (concentratie van atomen in een gas onder normale omstandigheden), (c) $N = 5.0 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ (concentratie van atomen in silicium).
Antwoord: (a) $a = N^{-1/3}$; (b) $a = 3.34 \times 10^{-9}$ m; (c) $a = 2.71 \times 10^{-10}$ m.

Vraagstuk 2.2. In een zwerm deeltjes met concentratie N wordt een „korrel" $\mathscr{V}_{gr}$ beschouwd in de vorm van een kubus met ribbe a. (a) Hoe groot moet a ten minste worden gekozen, opdat $\mathscr{V}_{gr}$ gemiddeld ten minste 10^6 deeltjes bevat? Bereken a, als (b) $N = 2.69 \times 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}$, (c) $N = 5.0 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$.
Antwoord: (a) $a = 10^2/N^{1/3}$; (b) $a = 3.34 \times 10^{-7}$ m; (c) $a = 2.71 \times 10^{-8}$ m.

Vraagstuk 2.3. In een geïoniseerd gas zijn twee soorten geladen deeltjes aanwezig, te weten: positieve ionen met concentratie N^+, convectiesnelheid $\mathbf{v}_{conv}^+$ en lading q^+, en negatieve ionen met concentratie N^-, convectiesnelheid $\mathbf{v}_{conv}^-$ en lading q^-. Geef de uitdrukking voor (a) ρ, (b) $\mathbf{J}$.
Antwoord: (a) $\rho = N^+ q^+ + N^- q^-$; (b) $\mathbf{J} = N^+ q^+ \mathbf{v}_{conv}^+ + N^- q^- \mathbf{v}_{conv}^-$.

Vraagstuk 2.4. In een metalen geleider vindt het transport van lading plaats door middel van elektronen met concentratie $N^{(e)}$ en convectiesnelheid $\mathbf{v}_{conv}^{(e)}$. Geef de uitdrukking voor (a) ρ, (b) $\mathbf{J}$, indien de geleider macroscopisch ongeladen is.
Antwoord: (a) $\rho = 0$; (b) $\mathbf{J} = -N^{(e)} e \mathbf{v}_{conv}^{(e)}$.

Vraagstuk 2.5. In een halfgeleider ontstaat de stroomdichtheid door de beweging van elektronen (met concentratie $N^{(e)}$ en convectiesnelheid $\mathbf{v}_{conv}^{(e)}$) en gaten (met concentratie $N^{(h)}$ en convectiesnelheid $\mathbf{v}_{conv}^{(h)}$). Geef de uitdrukking voor (a) ρ en (b) $\mathbf{J}$.
Antwoord: (a) $\rho = -N^{(e)} e + N^{(h)} e$; (b) $\mathbf{J} = -N^{(e)} e \mathbf{v}_{conv}^{(e)} + N^{(h)} e \mathbf{v}_{conv}^{(h)}$.

Vraagstuk 2.6. Laat $I \stackrel{\text{def}}{=\!=} \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}\, \mathrm{d}A$ de naar buiten gerichte stroom door het oppervlak $\mathscr{S}$ zijn en Q de totale hoeveelheid lading binnen $\mathscr{S}$. Druk met behulp van Vergelijking (2.29) de lading $Q = Q(t)$ uit in de stroom $I = I(t)$ in het tijdsinterval $t_0 \leq t < \infty$.
Antwoord: $Q(t) = Q(t_0) - \int_{t_0}^{t} I(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

Vraagstuk 2.7. In K metallische geleiders, die alle in een „knooppunt" met elkaar zijn verbonden, vloeien stationaire stromen I_k ($k = 1, \ldots, K$), waarbij $I_k \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathscr{A}_k} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}\, \mathrm{d}A$, met $\mathscr{A}_k$ = doorsnede van de k-de geleider. Bewijs, (a) dat I_k onafhankelijk is van de keuze van de doorsnede die voor het uitrekenen van de integraal wordt gebruikt, (b) dat $\sum_{k=1}^{K} I_k = 0$ (wet van KIRCHHOFF). (c) Welke eigenschap van $\mathbf{J}$ aan het grensvlak geleider/isolator is hierbij gebruikt? (Aanwijzing: maak gebruik van Vergelijking (2.35).)
Antwoord: (c) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ aan het grensvlak geleider/isolator.

Vraagstuk 2.8. Geef de volledige afleiding van Vergelijking (2.17), uitgaande van Vergelijking (2.16). (Aanwijzing: herleid Vergelijking (2.16) tot de gedaante $\iiint_{\mathscr{V}} P\, \mathrm{d}V = 0$ voor iedere $\mathscr{V}$, met P continu, en onderstel dat $P \neq 0$ (b.v. $P > 0$) in ten minste één punt van $\mathscr{V}$.)

Vraagstuk 2.9. Leid Vergelijking (2.17) rechtstreeks uit Vergelijking (2.14) af door voor $\mathscr{S}$ het oppervlak te nemen van een rechthoekig blok met het punt $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}_x + y_0\mathbf{i}_y + z_0\mathbf{i}_z$ als middelpunt en ribben Δx, Δy en Δz. Onderstel, dat $N\mathbf{v}_{\text{conv}}$ continu differentieerbaar is en gebruik overal op $\mathscr{S}$ voor $N\mathbf{v}_{\text{conv}}$ de ontwikkeling $N\mathbf{v}_{\text{conv}} = [N\mathbf{v}_{\text{conv}}]_{r_0} + (x-x_0)[\partial_x(N\mathbf{v}_{\text{conv}})]_{r_0} + (y-y_0)[\partial_y(N\mathbf{v}_{\text{conv}})]_{r_0} + (z-z_0)[\partial_z(N\mathbf{v}_{\text{conv}})]_{r_0} + \ldots$, waarin de weggelaten termen van hogere orde klein zijn in $x-x_0$, $y-y_0$ en $z-z_0$. Deel de resulterende uitdrukking door $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \Delta V$ en voer de limietovergang $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$ uit.

Vraagstuk 2.10. Gegeven is een statische verdeling van deeltjes waarin uitsluitend recombinatie van de deeltjes met andere deeltjes plaatsvindt en wel in het tempo $(\partial_t N)_{\text{ann}} = N/\tau$, waarin τ de „levensduur" van de deeltjes voorstelt. Bepaal $N = N(\mathbf{r}, t)$ als functie van t in het interval $t_0 \leq t < \infty$.
Antwoord: $N(\mathbf{r}, t) = N(\mathbf{r}, t_0)\exp[-(t-t_0)/\tau]$ voor $t_0 \leq t < \infty$.

Vraagstuk 2.11. In een medium dat aanwezig is in een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte met randoppervlak $\mathscr{S}$, wordt op het tijdstip $t = 0$ instantaan een aantal deeltjes n_0 geïnjecteerd. Ten gevolge van recombinatie met andere deeltjes in het in $\mathscr{V}$ aanwezige medium hebben de geïnjecteerde deeltjes een levensduur τ (zie Vraagstuk 2.10). Door $\mathscr{S}$ heen vindt na het injecteren geen stroming van deeltjes meer plaats. Laat $n = n(t)$ het aantal ten tijde t in $\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes zijn. Bepaal (a) de vergelijking waaraan $n = n(t)$ moet voldoen en (b) de oplossing van deze vergelijking. (Aanwijzing: maak gebruik van Vergelijking (2.9).)
Antwoord: (a) $\partial_t n = n_0\delta(t) - n/\tau$, waarin $\delta(t)$ = eenheidsstoot in de tijd; (b) $n = 0$ voor $-\infty < t < 0$, $n = n_0\exp(-t/\tau)$ voor $0 < t < \infty$.

3. Diffusiestroom

In een aantal fysische processen is één van de oorzaken (of de enige oorzaak) van het getransporteerd worden van deeltjes het optreden van een gradiënt in de concentratie van de deeltjes. Dit verschijnsel noemt men *diffusie* en de bijdrage die de diffusie tot de convectiesnelheid $\mathbf{v}_{\text{conv}}$ levert, noemt men doorgaans de *diffusiesnelheid* $\mathbf{v}_{\text{diff}}$. Voor een diffusieproces geldt, dat de locale waarde van de deeltjesstroomdichtheid $N\mathbf{v}_{\text{diff}}$ recht evenredig is met het tegengestelde van de locale gradiënt van de concentratie. Dit betekent, dat transport van deeltjes plaatsvindt in de richting van afnemende concentratie. Als de vergelijking die het diffusieproces beschrijft (constitutieve vergelijking) nemen wij

$$N\mathbf{v}_{\text{diff}} = -D\,\mathbf{grad}\,N\,. \tag{3.1}$$

Hierin is D de (locale) *diffusiecoëfficiënt*; deze is een maat voor de eigenschappen van het diffusieproces. Verder is

$$\mathbf{grad}\,N = (\partial_x N)\mathbf{i}_x + (\partial_y N)\mathbf{i}_y + (\partial_z N)\mathbf{i}_z\,. \tag{3.2}$$

Indien de kenmerkende eigenschappen van het diffusieproces van plaats tot plaats veranderen, is D een functie van de plaatscoördinaten, dus $D = D(\mathbf{r})$. In een gebied waar de kenmerkende eigenschappen van het diffusieproces onafhankelijk van de plaats zijn, is D een constante.

Indien diffusie het enige proces is waardoor transport van deeltjes optreedt, moeten N en $\mathbf{v}_{\text{diff}}$ ook nog aan de continuïteitsvergelijking (2.17) van de deeltjesstroom voldoen. Deze luidt, na substitutie van $\mathbf{v}_{\text{conv}} = \mathbf{v}_{\text{diff}}$,

$$\partial_t N + \operatorname{div}(N\mathbf{v}_{\text{diff}}) = (\partial_t N)_{\text{cr}} - (\partial_t N)_{\text{ann}}\,. \tag{3.3}$$

Substitutie van (3.1) in (3.3) leidt tot

$$\partial_t N - \operatorname{div}(D\,\mathbf{grad}\,N) = (\partial_t N)_{\text{cr}} - (\partial_t N)_{\text{ann}}\,. \tag{3.4}$$

Deze vergelijking staat bekend als de *diffusievergelijking*.

Bij diffusie van elektrisch geladen deeltjes ontstaat een stroom die

doorgaans *diffusiestroom* wordt genoemd. Om de vergelijkingen op te stellen waaraan de in een diffusiestroom optredende grootheden moeten voldoen, maken wij – evenals in Par. 2 – onderscheid tussen de verschillende soorten geladen deeltjes. Beschouw de diffusie van geladen deeltjes van de soort α, dan is de *diffusiestroomdichtheid* $\mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}}$ van de deeltjes van deze soort gegeven door (zie (2.25))

$$\mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}} = N^{(\alpha)} q^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)}_{\text{diff}}, \tag{3.5}$$

waarin $N^{(\alpha)}$ = concentratie van de deeltjes van de soort α, $q^{(\alpha)}$ = lading van de deeltjes van de soort α en $\mathbf{v}^{(\alpha)}_{\text{diff}}$ = diffusiesnelheid van de deeltjes van de soort α. Verder is de ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho^{(\alpha)}$ van de deeltjes van de soort α gegeven door (zie (2.24))

$$\rho^{(\alpha)} = N^{(\alpha)} q^{(\alpha)}. \tag{3.6}$$

Op grond van (3.1) is (3.5) te herschrijven als

$$\mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}} = -q^{(\alpha)} D^{(\alpha)} \,\mathbf{grad}\, N^{(\alpha)} = -D^{(\alpha)} \,\mathbf{grad}\, \rho^{(\alpha)}, \tag{3.7}$$

waarin $D^{(\alpha)}$ = diffusiecoëfficiënt van de deeltjes van de soort α. De totale diffusiestroomdichtheid $\mathbf{J}_{\text{diff}}$ is op grond van (2.32) gegeven door

$$\mathbf{J}_{\text{diff}} = \sum_{\alpha} \mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}}. \tag{3.8}$$

Indien diffusie het enige proces is waardoor transport van geladen deeltjes optreedt, moeten $\mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}}$ en $\rho^{(\alpha)}$ ook nog aan de continuïteitsvergelijking (2.27) van de geladen deeltjes van de soort α voldoen. Deze luidt, na substitutie van $\mathbf{J}^{(\alpha)} = \mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}}$,

$$\partial_t \rho^{(\alpha)} + \operatorname{div} \mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}} = (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\text{cr}} - (\partial_t \rho^{(\alpha)})_{\text{ann}}, \tag{3.9}$$

of – met gebruikmaking van (3.6) –

$$\partial_t N^{(\alpha)} + (1/q^{(\alpha)}) \operatorname{div} \mathbf{J}^{(\alpha)}_{\text{diff}} = (\partial_t N^{(\alpha)})_{\text{cr}} - (\partial_t N^{(\alpha)})_{\text{ann}}. \tag{3.10}$$

Substitutie van (3.7) in (3.10) leidt wederom tot een diffusievergelijking van het type (3.4).

Een van de basisproblemen in de theorie van de diffusie heeft tot onderwerp de bepaling van de concentratie en van de deeltjesstroomdichtheid van deeltjes die instantaan op een bepaalde plaats in een medium worden geïnjecteerd. Twee gevallen van dit probleem zullen hieronder worden besproken, nl. (a) de diffusie van instantaan, in een punt geïnjecteerde deeltjes (driedimensionaal probleem), (b) de diffusie van instantaan, in een vlak geïnjecteerde deeltjes (eendimensionaal probleem). Deze problemen zullen apart worden behandeld.

(a) *Diffusie van instantaan, in een punt geïnjecteerde deeltjes (driedimensionaal probleem)*

Laten n_0 deeltjes van een bepaalde soort ten tijde $t = 0$ en ter plaatse $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (d.w.z. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) in een oneindig uitgebreid medium worden geïnjecteerd. Ondersteld wordt, dat de diffusiecoëfficiënt D voor deze deeltjes plaatsonafhankelijk is. Ten gevolge van recombinatie met deeltjes van een andere soort hebben de geïnjecteerde deeltjes een eindige levensduur τ. Gevraagd wordt de concentratie $N = N(\mathbf{r}, t)$ van de deeltjes als functie van plaats en tijd te bepalen.

Het injecteren van de deeltjes wordt beschreven met behulp van de vergelijking

$$(\partial_t N)_{\mathrm{cr}} = n_0 \delta(\mathbf{r}, t) , \tag{3.11}$$

waarin $\delta(\mathbf{r}, t) = \delta(x, y, z, t)$ de ter plaatse $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (d.w.z. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) en ten tijde $t = 0$ werkende eenheidsstoot is. Het recombineren van de deeltjes met deeltjes van een andere soort wordt beschreven met behulp van de vergelijking

$$(\partial_t N)_{\mathrm{ann}} = N/\tau . \tag{3.12}$$

Substitutie van (3.11) en (3.12) in (3.4) geeft

$$\partial_t N - D\nabla^2 N = n_0 \delta(\mathbf{r}, t) - N/\tau , \tag{3.13}$$

waarin

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{3.14}$$

de operator van LAPLACE voorstelt.

Om de oplossing van (3.13) te construeren, substitueren wij in deze vergelijking de uitdrukking

$$N = n_0 U \exp(-t/\tau) , \tag{3.15}$$

waarin $U = U(\mathbf{r}, t)$ nader te bepalen is. Daar

$$\nabla^2 N = n_0 (\nabla^2 U) \exp(-t/\tau) \tag{3.16}$$

en

$$\partial_t N = n_0 (\partial_t U) \exp(-t/\tau) - N/\tau , \tag{3.17}$$

verkrijgen wij voor $U = U(\mathbf{r}, t)$ de volgende vergelijking

$$\partial_t U - D\nabla^2 U = \delta(\mathbf{r}, t) . \tag{3.18}$$

Op grond van de bolsymmetrie in de ruimtelijke configuratie kan een bolsymmetrische oplossing van (3.18) worden verwacht. Deze is gegeven

door

$$U = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad -\infty < t < 0, \\ (4\pi Dt)^{-3/2} \exp(-r^2/4Dt) & \text{voor} \quad 0 < t < \infty, \end{cases} \tag{3.19}$$

waarin

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \tag{3.20}$$

de afstand van het punt van injectie tot het punt van waarneming is. Door uitvoeren van de operaties ∂_t en ∇^2 op het rechterlid van (3.19) is eenvoudig te verifiëren, dat (3.19) aan (3.18) voldoet, zolang niet $t = 0$ en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. (Dan is nl. het rechterlid van (3.18) gelijk aan nul.) Verder zullen wij bewijzen, dat het naar x, y en z geïntegreerde linkerlid van (3.18) na substitutie van (3.19) inderdaad $\delta(t)$ oplevert en het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.18) na substitutie van (3.19) inderdaad $\delta(\mathbf{r})$.

In de eerste plaats voeren wij de integraties naar x, y en z uit. Met behulp van (3.19) wordt verkregen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\infty < t < 0, \\ [(4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/4Dt)\mathrm{d}x]^3 = 1 & \\ & \text{voor } 0 < t < \infty. \end{cases} \tag{3.21}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2)\mathrm{d}u = \pi^{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}$$

Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 U \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{voor } t \neq 0, \tag{3.23}$$

daar $\partial_x U \to 0$, $\partial_y U \to 0$ en $\partial_z U \to 0$ voor $r \to \infty$, zolang $t \neq 0$. Voor het rechterlid van (3.21) kunnen wij derhalve schrijven $\varepsilon(t)$, waarin $\varepsilon(t)$ de eenheidssprong ten tijde $t = 0$ voorstelt. Daar $\partial_t \varepsilon(t) = \delta(t)$, levert het naar x, y en z geïntegreerde linkerlid van (3.18) na substitutie van (3.19) inderdaad $\delta(t)$ op.

Vervolgens voeren wij de integratie naar t uit. Met behulp van (3.19) wordt verkregen

$$\int_{-\infty}^{\infty} U \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} U \,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} (4\pi Dt)^{-3/2} \exp(-r^2/4Dt)\mathrm{d}t$$
$$= (4\pi rD)^{-1} \qquad \text{voor } r \neq 0. \tag{3.24}$$

In de integraal in het rechterlid is gesubstitueerd $r^2/4Dt = u^2$, waarna (3.22) wederom kan worden gebruikt. Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t U \, dt = \int_0^{\infty} \partial_t U \, dt = 0 \qquad \text{voor } r \neq 0, \tag{3.25}$$

daar $U \to 0$ voor $t \downarrow 0$ en voor $t \to \infty$, zolang $r \neq 0$. Voor het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.18) kunnen wij na substitutie van (3.19) derhalve schrijven $-\nabla^2(1/4\pi r)$. Uit de potentiaaltheorie is bekend, dat $\nabla^2(1/4\pi r) = -\delta(\mathbf{r})$, zodat het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.18) na substitutie van (3.19) inderdaad $\delta(\mathbf{r})$ oplevert.

Substitutie van (3.19) in (3.15) geeft tenslotte

$$N = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\infty < t < 0, \\ n_0(4\pi Dt)^{-3/2} \exp(-r^2/4Dt) \exp(-t/\tau) & \text{voor } 0 < t < \infty. \end{cases} \tag{3.26}$$

In Fig. 5 is het verloop van N als functie van r bij veranderlijke t ($t > 0$) weergegeven. Teneinde tot een stelsel universele krommen te geraken, is als dimensieloze tijdvariabele t/τ gekozen en als dimensieloze ruimtelijke variabele $r/(D\tau)^{\frac{1}{2}}$, waarin $(D\tau)^{\frac{1}{2}}$ de zgn. *diffusielengte* van de deeltjes in het beschouwde materiaal voorstelt.

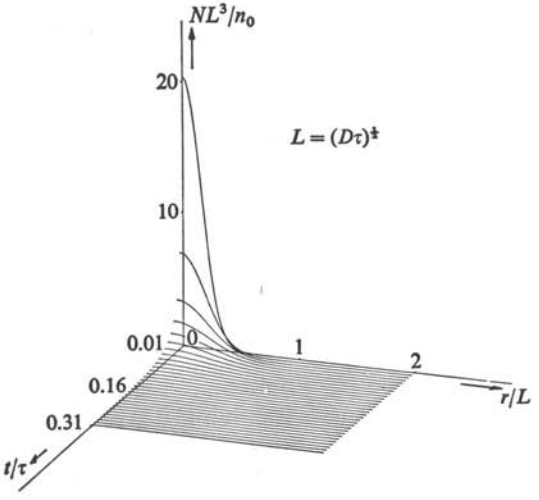


Fig. 5. Concentratie N van n_0 deeltjes die instantaan op het tijdstip $t = 0$ in het punt $r = 0$ in een diffunderend materiaal worden geïnjecteerd (L = diffusielengte, D = diffusiecoëfficiënt en τ = levensduur van de deeltjes).

Met behulp van de verkregen deeltjesconcentratie (3.26) bepalen wij nog de naar buiten gerichte *deeltjesstroom* door het boloppervlak $\mathscr{S}(\mathcal{O};r)$ met middelpunt in $\mathcal{O}$ en straal r. Deze wordt gegeven door

$$\oiint_{\mathscr{S}(\mathcal{O};r)} \mathbf{n}\cdot N\mathbf{v}_{\text{diff}}\,\mathrm{d}A = -4\pi r^2 D\,\partial_r N = (2\pi r^3/t)\,N, \tag{3.27}$$

waarin N wordt gegeven door (3.26) en waarbij de uit (3.1) volgende betrekking $\mathbf{n}\cdot N\mathbf{v}_{\text{diff}} = -D\mathbf{n}\cdot\mathbf{grad}\,N = -D\partial_r N$ op $\mathscr{S}(\mathcal{O};r)$ is gebruikt. Het verloop van de deeltjesstroom als functie van r bij veranderlijke t ($t>0$) is weergegeven in Fig. 6. Ook hier is als dimensieloze tijdvariabele t/τ gekozen en als dimensieloze ruimtelijke variabele $r/(D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

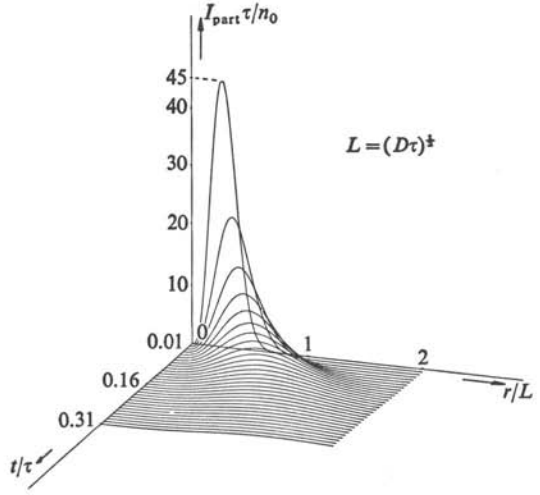


Fig. 6. Deeltjesstroom I_{part} door het oppervlak van een bol met straal r van n_0 deeltjes die instantaan op het tijdstip $t=0$ in het middelpunt worden geïnjecteerd.

(b) *Diffusie van instantaan, in een vlak geïnjecteerde deeltjes (eendimensionaal probleem)*

Het eendimensionale analogon van het probleem van de instantane injectie van een aantal deeltjes op één bepaalde plaats vindt toepassing in de diffusie van ladingdragers in een halfgeleidend materiaal. Het bedoelde probleem betreft de diffusie van ladingdragers in een uniforme,

cilindrische staaf van halfgeleidend materiaal, waarin met behulp van een lichtflits instantaan, uniform over de dwarsdoorsnede verdeeld, in een bepaalde doorsnede n_0 ladingdragers van een bepaald type worden gegenereerd. Wij gebruiken een Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan de x-as langs de as van de staaf valt en veronderstellen dat alle grootheden uniform over een dwarsdoorsnede zijn verdeeld. Dan is de concentratie van de ladingdragers alleen een functie van x en t. Laat τ de levensduur van de ladingdragers zijn en D hun diffusiecoëfficiënt, dan voldoet $N = N(x,t)$ aan de vergelijking

$$\partial_t N - D\,\partial_x^2 N = (n_0/A)\,\delta(x,t) - N/\tau\,, \tag{3.28}$$

waarin A de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de staaf voorstelt. Vergelijking (3.28) volgt uit (3.4) door $\partial_y \equiv 0$ en $\partial_z \equiv 0$ te stellen en in rekening te brengen, dat voor het beschouwde eendimensionale probleem geldt

$$(\partial_t N)_{\mathrm{cr}} = (n_0/A)\delta(x,t) \qquad \text{en} \qquad (\partial_t N)_{\mathrm{ann}} = N/\tau\,. \tag{3.29}$$

Om de oplossing van (3.28) te construeren, substitueren wij in deze vergelijking de uitdrukking

$$N = (n_0/A)\,U \exp(-t/\tau)\,, \tag{3.30}$$

waarin $U = U(x,t)$ nader te bepalen is. Daar

$$\partial_x^2 N = (n_0/A)\,(\partial_x^2 U)\,\exp(-t/\tau) \tag{3.31}$$

en

$$\partial_t N = (n_0/A)(\partial_t U)\exp(-t/\tau) - N/\tau\,, \tag{3.32}$$

verkrijgen wij voor $U = U(x,t)$ de volgende vergelijking

$$\partial_t U - D\,\partial_x^2 U = \delta(x,t)\,. \tag{3.33}$$

De oplossing hiervan is gegeven door

$$U = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\infty < t < 0\,, \\ (4\pi D t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/4Dt) & \text{voor } 0 < t < \infty\,. \end{cases} \tag{3.34}$$

Door op het rechterlid van (3.34) de operaties ∂_t en ∂_x^2 uit te voeren, is eenvoudig te verifiëren, dat (3.34) aan (3.33) voldoet, zolang niet $t = 0$ en $x = 0$. (Dan is nl. het rechterlid van (3.33) gelijk aan nul.) Verder zullen

wij bewijzen, dat het naar x geïntegreerde linkerlid van (3.33) na substitutie van (3.34) inderdaad $\delta(t)$ oplevert en het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.33) na substitutie van (3.34) inderdaad $\delta(x)$.

In de eerste plaats voeren wij de integratie naar x uit. Met behulp van (3.34) wordt verkregen

$$\int_{-\infty}^{\infty} U\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\infty < t < 0, \\ (4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/4Dt)\,\mathrm{d}x = 1 & \\ & \text{voor } \quad 0 < t < \infty. \end{cases} \tag{3.35}$$

Hierbij is van de standaardintegraal (3.22) gebruik gemaakt. Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 U\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{voor } t \neq 0, \tag{3.36}$$

daar $\partial_x U \to 0$ voor $x \to -\infty$ en voor $x \to \infty$. Voor het rechterlid van (3.35) kunnen wij schrijven $\varepsilon(t)$, waarin $\varepsilon(t)$ de eenheidssprong ten tijde $t = 0$ voorstelt. Daar $\partial_t \varepsilon(t) = \delta(t)$, levert het naar x geïntegreerde linkerlid van (3.33) na substitutie van (3.34) inderdaad $\delta(t)$ op.

Vervolgens voeren wij de integratie naar t uit. Daar $\int_{-\infty}^{\infty} U\,\mathrm{d}t$ divergent is, is het verwisselen van de operaties $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t$ en ∂_x^2 niet geoorloofd. Nu is echter $\partial_x U = -(x/2Dt)\,U$, zodat

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x U\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \partial_x U\,\mathrm{d}t \\ &= -(2\pi x) \int_0^{\infty} (4\pi Dt)^{-3/2}\ \exp(-x^2/4Dt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.37}$$

In de laatste integraal substitueren wij $x^2/4Dt = u^2$ en gebruiken de standaardintegraal (3.22). Voor de gebruikte substitutie geldt verder $(x^2)^{\frac{1}{2}} = |x|$, zodat met

$$\operatorname{sgn}(x) = x/|x| \qquad \text{voor } x \neq 0 \tag{3.38}$$

wordt verkregen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x U\,\mathrm{d}t = -(2D)^{-1} \operatorname{sgn}(x) \qquad \text{voor } x \neq 0. \tag{3.39}$$

Verder is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t U\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \partial_t U\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{voor } x \neq 0, \tag{3.40}$$

daar $U \to 0$ voor $t \downarrow 0$ en voor $t \to \infty$, zolang $x \neq 0$. Voor het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.33) kunnen wij derhalve na substitutie van (3.34) schrijven $\partial_x[\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x)]$. Daar $\partial_x[\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(x)] = \delta(x)$, levert het naar t geïntegreerde linkerlid van (3.33) na substitutie van (3.34) inderdaad $\delta(x)$ op.

Substitutie van (3.34) in (3.30) levert tenslotte

$$N = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\infty < t < 0\,, \\ (n_0/A)\,(4\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/4Dt) \exp(-t/\tau) & \text{voor } 0 < t < \infty. \end{cases} \tag{3.41}$$

In Fig. 7 is het verloop van N als functie van x bij veranderlijke t ($t > 0$) weergegeven. Teneinde tot een stelsel universele krommen te geraken, is als dimensieloze tijdvariabele t/τ gekozen en als dimensieloze ruimtelijke variabele $x/(D\tau)^{\frac{1}{2}}$, waarin $(D\tau)^{\frac{1}{2}}$ de zgn. *diffusielengte* van de deeltjes in het beschouwde materiaal voorstelt.

Met behulp van de verkregen deeltjesconcentratie (3.41) bepalen wij nog de totale deeltjesstroom door een willekeurige dwarsdoorsnede van

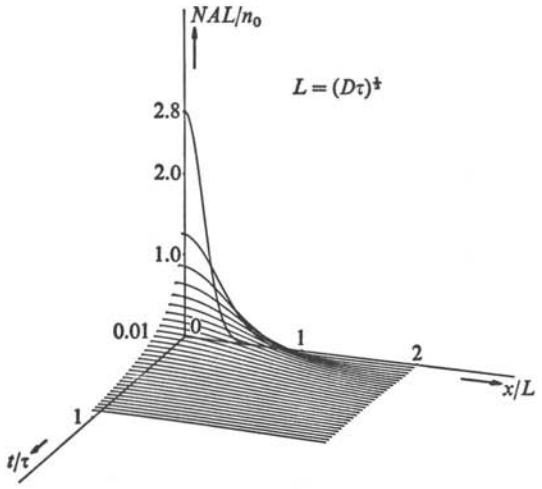


Fig. 7. Concentratie N van n_0 deeltjes die instantaan op het tijdstip $t = 0$ in de doorsnede $x = 0$ van een cilindrische staaf van diffunderend materiaal worden geïnjecteerd (L = diffusielengte, D = diffusiecoëfficiënt en τ = levensduur van de deeltjes, A = oppervlakte van de dwarsdoorsnede).

de staaf. De deeltjesstroom in de positieve x-richting is gegeven door

$$\iint_{\text{dwarsdoorsnede}} \mathbf{i}_x \cdot N\mathbf{v}_{\text{diff}}\, dydz = -AD\,\partial_x N = (x/2t)\,AN, \qquad (3.42)$$

waarin N wordt gegeven door (3.41) en waarbij de uit (3.1) volgende betrekking $\mathbf{i}_x \cdot N\mathbf{v}_{\text{diff}} = -D\mathbf{i}_x \cdot \mathbf{grad}\, N = -D\partial_x N$ is gebruikt. Het verloop van de deeltjesstroom als functie van x bij veranderlijke t ($t > 0$) is weergegeven in Fig. 8. Ook hier is als dimensieloze tijdvariable t/τ gekozen en als dimensieloze ruimtelijke variabele $x/(D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

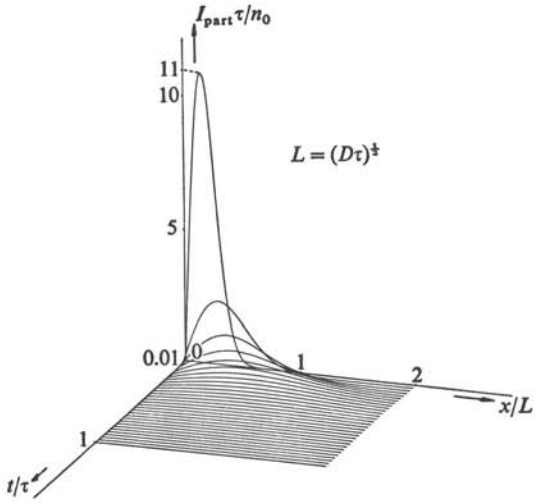


Fig. 8. Deeltjesstroom I_{part} door een dwarsdoorsnede ter plaatse x van n_0 deeltjes die instantaan op het tijdstip $t = 0$ ter plaatse $x = 0$ in een cilindrische staaf worden geïnjecteerd.

Voor verdere toepassingen van de in deze paragraaf behandelde theorie op de diffusie van ladingdragers in halfgeleidende materialen verwijzen wij naar MÜLLER[4] en NICHOLS and VERNON[5].

Tot slot zijn in Tabel 3 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

4. MÜLLER, R., *Grundlagen der Halbleiter-Elektronik*. Berlin, Springer-Verlag, 1971.
5. NICHOLS, K. G. and E. V. VERNON, *Transistor Physics*. London, Chapman and Hall, 1966.

Tabel 3. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
diffusiecoëfficiënt	D	meterkwadraat per seconde	m^2/s
diffusiesnelheid	v_{diff}	meter per seconde	m/s
diffusiestroomdichtheid	J_{diff}	ampère per vierkante meter	A/m^2
levensduur van een deeltje	τ	seconde	s
diffusielengte	$L=(D\tau)^{\frac{1}{2}}$	meter	m

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 3.1. In een halfgeleidend materiaal vindt diffusie plaats van elektronen (met concentratie $N^{(e)}$, diffusiecoëfficiënt $D^{(e)}$ en levensduur $\tau^{(e)}$) en gaten (met concentratie $N^{(h)}$, diffusiecoëfficiënt $D^{(h)}$ en levensduur $\tau^{(h)}$). Geef (a) de met Vergelijking (3.7) overeenkomende uitdrukkingen voor $\mathbf{J}^{(e)}_{diff}$ en $\mathbf{J}^{(h)}_{diff}$ en (b) de uit de Vergelijkingen (3.10) en (3.12) volgende vergelijkingen voor $N^{(e)}$ en $N^{(h)}$.
Antwoord: (a) $\mathbf{J}^{(e)}_{diff}=eD^{(e)}\,\mathbf{grad}\,N^{(e)}$, $\mathbf{J}^{(h)}_{diff}=-eD^{(h)}\,\mathbf{grad}\,N^{(h)}$; (b) $\partial_t N^{(e)}-(1/e)\,\mathrm{div}\,\mathbf{J}^{(e)}_{diff}=(\partial_t N^{(e)})_{cr}-N^{(e)}/\tau^{(e)}$, $\partial_t N^{(h)}+(1/e)\,\mathrm{div}\,\mathbf{J}^{(h)}_{diff}=(\partial_t N^{(h)})_{cr}-N^{(h)}/\tau^{(h)}$.

Vraagstuk 3.2. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.26) het maximum als functie van t bij vaste r. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_t N=(-3/2t+r^2/4Dt^2-1/\tau)N$ en los t op uit de vergelijking $\partial_t N=0$.)
Antwoord: $t/\tau=-3/4+(3/4)(1+4r^2/9D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 3.3. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.26) het maximum als functie van r bij vaste t. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_r N=-(r/2Dt)N$ en los r op uit de vergelijking $\partial_r N=0$.)
Antwoord: $r=0$.

Vraagstuk 3.4. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.27) het maximum als functie van t bij vaste r. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_t(2\pi r^3 t^{-1}N)=2\pi r^3(-t^{-2}-3/2t^2+r^2/4Dt^3-1/t\tau)N$ en los t op uit de vergelijking $\partial_t(2\pi r^3 t^{-1}N)=0$.)
Antwoord: $t/\tau=-5/4+(5/4)(1+4r^2/25D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 3.5. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.27) het maximum als functie van r bij vaste t. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_r(2\pi r^3 t^{-1}N)=2\pi t^{-1}(3r^2-r^4/2Dt)N$ en los r op uit de vergelijking $\partial_r(2\pi r^3 t^{-1}N)=0$.)
Antwoord: $r=(6Dt)^{\frac{1}{2}}$. (Het extreem bij $r=0$ is een minimum ter grootte nul.)

Vraagstuk 3.6. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.41) het maximum als functie van t bij vaste x. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_t N=(-1/2t+x^2/4Dt^2-1/\tau)N$ en los t op uit de vergelijking $\partial_t N=0$.)
Antwoord: $t/\tau=-1/4+(1/4)(1+4x^2/D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 3.7. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.41) het maximum als functie van x bij vaste t. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_x N = -(x/2Dt)N$ en los x op uit de vergelijking $\partial_x N = 0$.)
Antwoord: $x = 0$.

Vraagstuk 3.8. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.42) het maximum als functie van t bij vaste x. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_t(xAN/2t) = (xA/2)(-1/t^2 - 1/2t^2 + x^2/4Dt^3 - 1/t\tau)N$ en los t op uit de vergelijking $\partial_t(xAN/2t) = 0$.)
Antwoord: $t/\tau = -3/4 + (3/4)(1 + 4x^2/9D\tau)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 3.9. Bepaal van het rechterlid van Vergelijking (3.42) het maximum als functie van x bij vaste t. (Aanwijzing: leid af, dat $\partial_x(xAN/2t) = (A/2t)(1 - x^2/2Dt)N$ en los x op uit de vergelijking $\partial_x(xAN/2t) = 0$.)
Antwoord: $x = (2Dt)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 3.10. Bepaal van de antwoorden van de Vraagstukken 3.2, 3.4, 3.6 en 3.8 de limietwaarden voor $\tau \to \infty$.
Antwoord: $t = r^2/6D$, $t = r^2/10D$, $t = x^2/2D$, $t = x^2/6D$.

4. Elektrisch moment en magnetisch moment van een stelsel geladen deeltjes

Bij het bepalen van de macroscopische convectiestroomdichtheid van een zwerm bewegende geladen deeltjes (zie Par. 2) is behalve de elektrische lading van de deeltjes alleen hun snelheid van belang en niet hun onderlinge positie of de door hen doorlopen baan. De onderlinge positie van de geladen deeltjes en de door hen doorlopen baan spelen wel een rol in de zgn. *klassieke elektronentheorie*, die is opgesteld door H. A. LORENTZ[6].

In deze theorie wordt getracht via een bepaald model van de elementaire bouwstenen van de materie (atomen, moleculen) de elektromagnetische eigenschappen van een materiaal op macroscopische schaal te verklaren. De grondonderstellingen van de klassieke elektronentheorie zijn: (a) de atomen en moleculen bestaan uit elektrisch geladen deeltjes, (b) door wederzijdse elektromagnetische beïnvloeding nemen deze deeltjes ten opzichte van elkaar een bepaalde positie in of beschrijven zij ten opzichte van elkaar een bepaalde baan, (c) het geheel van elektrisch geladen deeltjes is opgesteld in vacuüm. Het is gelukt via deze theorie een aantal verschijnselen te verklaren; voor de verklaring van andere verschijnselen heeft men een beroep moeten doen op de *quantumtheorie* (zie b.v. MESSIAH[7]).

De grootheid die te maken heeft met de onderlinge positie van de geladen deeltjes is het *elektrische moment* $\mathbf{p}$ van een stelsel deeltjes ten opzichte van een vaste oorsprong $\mathcal{O}$. Geef de deeltjes een rangnummer k ($k = 1, \ldots, K$). Laat q_k de lading van het deeltje met rangnummer k zijn en $\mathbf{r}_k$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ naar het punt waar het deeltje met rangnummer k zich bevindt. Het elektrische moment $\mathbf{p}_k$ van het deeltje met rangnummer k ten opzichte van de oorsprong $\mathcal{O}$ is dan gedefinieerd als

$$\mathbf{p}_k \stackrel{\text{def}}{=\!=} q_k \mathbf{r}_k \qquad (k = 1, \ldots, K) \tag{4.1}$$

6. LORENTZ, H. A., *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*. Leipzig, Teubner, 1909.
7. MESSIAH, A., *Quantum mechanics*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.

en het totale elektrische moment $\mathbf{p}$ van de K deeltjes ten opzichte van $\mathcal{O}$ als

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{r}_k . \tag{4.2}$$

In het algemeen is voor een gegeven stelsel deeltjes de waarde van $\mathbf{p}$ afhankelijk van de keuze van de oorsprong $\mathcal{O}$. Een nodige en voldoende voorwaarde om $\mathbf{p}$ onafhankelijk van de keuze van $\mathcal{O}$ te doen zijn, is $\sum_{k=1}^{K} q_k = 0$. Deze voorwaarde is van kracht als de hoeveelheid positieve lading die in het stelsel deeltjes aanwezig is, even groot is als de hoeveelheid negatieve lading, dus als in totaal het stelsel deeltjes elektrisch neutraal is. (Dit laatste is b.v. het geval in een elektrisch neutraal atoom.) Om de gestelde voorwaarde af te leiden, kiezen wij een van $\mathcal{O}$ verschillende oorsprong $\mathcal{O}'$ en bepalen het elektrische moment $\mathbf{p}'$ van het stelsel geladen deeltjes ten opzichte van $\mathcal{O}'$. Laat $\mathbf{r}'_k$ de plaatsvector zijn van $\mathcal{O}'$ naar het deeltje met rangnummer k en $\mathbf{r}_0$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ naar $\mathcal{O}'$, dan is $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0$ en derhalve

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{r}'_k = \sum_{k=1}^{K} q_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) = \sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{r}_k - \left(\sum_{k=1}^{K} q_k \right) \mathbf{r}_0 \\ &= \mathbf{p} - \left(\sum_{k=1}^{K} q_k \right) \mathbf{r}_0 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hieruit volgt, dat $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{K} q_k = 0$, waarmee de gestelde voorwaarde is afgeleid.

Het elektrische moment van een stelsel geladen deeltjes dat in totaal neutraal is, is nog op een andere wijze te interpreteren. Laat Q de totaal aanwezige hoeveelheid positieve lading zijn en $-Q$ de totaal aanwezige hoeveelheid negatieve lading, dan is

$$Q = \sum_{\substack{\text{positief geladen} \\ \text{deeltjes}}} q_k \quad \text{en} \quad -Q = \sum_{\substack{\text{negatief geladen} \\ \text{deeltjes}}} q_k . \tag{4.4}$$

Definieer nu de plaatsvector $\mathbf{r}^+$ van de oorsprong $\mathcal{O}$ naar het „ladingsmiddelpunt" van de positief geladen deeltjes via de betrekking

$$\sum_{\substack{\text{positief geladen} \\ \text{deeltjes}}} q_k \mathbf{r}_k = Q \mathbf{r}^+ \tag{4.5}$$

en de plaatsvector $\mathbf{r}^-$ van de oorsprong $\mathcal{O}$ naar het „ladingsmiddelpunt" van de negatief geladen deeltjes via de betrekking

$$\sum_{\substack{\text{negatief geladen} \\ \text{deeltjes}}} q_k \mathbf{r}_k = -Q \mathbf{r}^- . \tag{4.6}$$

Substitutie van (4.5) en (4.6) in (4.2) leidt tot

$$\mathbf{p} = Q(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-)\,; \tag{4.7}$$

hierin is $\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-$ de plaatsvector van het ladingsmiddelpunt van de negatief geladen deeltjes naar het ladingsmiddelpunt van de positief geladen deeltjes. De uitdrukking (4.7) vindt toepassing in de interpretatie van het elektrische moment dat kan optreden in de elementaire bouwstenen van de materie (atomen, moleculen).

Voor een zwerm geladen deeltjes waarvan overeenkomstig de in Par. 2 behandelde methode de concentratie $N = N(\mathbf{r}, t)$ kan worden ingevoerd, kunnen wij de ruimtelijke dichtheid van elektrisch moment $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ ten opzichte van een vaste oorsprong $\mathcal{O}$ invoeren. Laat $\mathcal{V}$ een begrensd gebied in de ruimte zijn, waarin zich geladen deeltjes bevinden. Laat ΔV de inhoud zijn van een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathcal{V}$ van $\mathcal{V}$ dat een punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat. Laat ΔN het aantal op het tijdstip t in $\Delta\mathcal{V}$ aanwezige deeltjes zijn, dan wordt de ruimtelijke dichtheid van elektrisch moment ingevoerd als

$$\mathbf{P} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathcal{V}\to\mathcal{V}_{\text{gr}}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} \mathbf{p}_k\,. \tag{4.8}$$

Op grond van (2.1) is hiervoor ook te schrijven

$$\mathbf{P} = N \lim_{\Delta\mathcal{V}\to\mathcal{V}_{\text{gr}}} \langle \mathbf{p} \rangle\,. \tag{4.9}$$

In de limiet in het rechterlid van (4.8) en (4.9) is $\mathcal{V}_{\text{gr}}$ wederom een korrel in het gebied waar de zwerm deeltjes aanwezig is en blijft $\mathbf{r}$ een inwendig punt van $\mathcal{V}_{\text{gr}}$. Op grond van de continuümshypothese is de aldus ingevoerde $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$. Met behulp van de definitie (4.8) is voor het elektrische moment $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ van de totaal in het gebied $\mathcal{V}$ aanwezige lading te schrijven

$$\mathbf{p} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{P}\, \mathrm{d}V\,. \tag{4.10}$$

De grootheid $\mathbf{P}$ wordt ook wel de *elektrische polarisatie* genoemd (zie ook Par. 9).

De grootheid die te maken heeft met de doorlopen baan van de geladen deeltjes (meer in het bijzonder in het geval van het doorlopen van een gesloten baan) is het *baanmagnetische moment* $\mathbf{m}$ van een stelsel deeltjes ten opzichte van een vaste oorsprong $\mathcal{O}$. Geef de deeltjes wederom een rangnummer k ($k = 1, \ldots, K$). Laat q_k de lading van het deeltje met rangnummer k zijn, $\mathbf{v}_k$ zijn snelheid en $\mathbf{r}_k$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ naar het punt waar het deeltje met rangnummer k zich bevindt. Het baan-

magnetische moment $\mathbf{m}_k$ van het deeltje met rangnummer k ten opzichte van de oorsprong $\mathcal{O}$ is dan gedefinieerd als

$$\mathbf{m}_k \overset{\text{def}}{=\!=} \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_k \times q_k \mathbf{v}_k \qquad (k = 1, \ldots, K) \tag{4.11}$$

en het totale baanmagnetische moment $\mathbf{m}$ van de K deeltjes ten opzichte van $\mathcal{O}$ als

$$\mathbf{m} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{m}_k = \sum_{k=1}^{K} (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}_k \times q_k \mathbf{v}_k). \tag{4.12}$$

(De factor $\frac{1}{2}$ in het rechterlid van (4.11) is een kwestie van conventie; zo komt in de overeenkomstige definitie van mechanisch impulsmoment deze factor niet voor.) In het algemeen is voor een gegeven stelsel deeltjes de waarde van $\mathbf{m}$ afhankelijk van de keuze van de oorsprong $\mathcal{O}$. Een nodige en voldoende voorwaarde om $\mathbf{m}$ onafhankelijk van de keuze van $\mathcal{O}$ te doen zijn, is $\sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Om de gestelde voorwaarde af te leiden, kiezen wij een van $\mathcal{O}$ verschillende oorsprong $\mathcal{O}'$ en bepalen het baanmagnetische moment $\mathbf{m}'$ van het stelsel geladen deeltjes ten opzichte van $\mathcal{O}'$. Laat $\mathbf{r}'_k$ de plaatsvector zijn van $\mathcal{O}'$ naar het deeltje met rangnummer k en $\mathbf{r}_0$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ naar $\mathcal{O}'$, dan is $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0$ en derhalve

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}' &= \sum_{k=1}^{K} (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}'_k \times q_k \mathbf{v}_k) = \sum_{k=1}^{K} [\tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) \times q_k \mathbf{v}_k] \\
&= \sum_{k=1}^{K} (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}_k \times q_k \mathbf{v}_k) - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_0 \times \left(\sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{v}_k \right) \\
&= \mathbf{m} - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_0 \times \left(\sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{v}_k \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aangezien $\mathbf{r}_0$ willekeurig is, volgt hieruit, dat $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$ dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{K} q_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, waarmee de gestelde voorwaarde is afgeleid.

Een aparte rol speelt nog het baanmagnetische moment van een deeltje dat periodiek in de tijd een gesloten baan doorloopt. Laat het deeltje met rangnummer k zo'n deeltje zijn, noem T_k zijn omlooptijd en $\mathbf{A}_k$ de vectoriële oppervlakte van de door hem doorlopen baan, d.w.z.

$$\mathbf{A}_k = \tfrac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + T_k} \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k \, \mathrm{d}t, \tag{4.14}$$

waarin $t = t_0$ een willekeurig tijdstip voorstelt. Daar voor een gesloten baan geldt

$$\int_{t_0}^{t_0 + T_k} \mathbf{v}_k \, \mathrm{d}t = \oint_{\text{baan}} \mathrm{d}\mathbf{r}_k = \mathbf{0}, \tag{4.15}$$

is $\mathbf{A}_k$ onafhankelijk van de keuze van de oorsprong. Voor de gemiddelde waarde van $\mathbf{m}_k$, genomen over één omlooptijd van het deeltje, wordt gevonden

$$T_k^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T_k} \mathbf{m}_k \, \mathrm{d}t = T_k^{-1} \int_{t_0}^{t_0+T_k} (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}_k \times q_k \mathbf{v}_k) \, \mathrm{d}t = (q_k/T_k) \, \mathbf{A}_k . \quad (4.16)$$

Daar $\mathbf{A}_k$ onafhankelijk is van de keuze van de oorsprong, is ook het linkerlid van (4.16) onafhankelijk van de keuze van de oorsprong.

Behalve het via (4.11) ingevoerde baanmagnetische moment kan een deeltje ook nog een magnetisch moment ten gevolge van een tolbeweging om zijn eigen as bezitten. Dit magnetische moment is gericht langs de momentane draaiingsas van het deeltje en wordt *spinmagnetisch moment* genoemd. Het totale magnetische moment dat een deeltje bezit, wordt gevormd uit de vectoriële som van zijn baanmagnetische moment en zijn spinmagnetische moment. Zowel het baanmagnetische als het spinmagnetische moment zijn gequantiseerd.

In het vervolg zullen wij het totale magnetische moment van een deeltje aangeven met $\mathbf{m}$, het baanmagnetische moment met $\mathbf{m}_{\mathrm{orbit}}$ en het spinmagnetische moment met $\mathbf{m}_{\mathrm{spin}}$. Dan geldt

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_{\mathrm{orbit},k} + \mathbf{m}_{\mathrm{spin},k} \qquad (k = 1, \ldots, N) \quad (4.17)$$

voor ieder deeltje apart en

$$\mathbf{m} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{m}_{\mathrm{orbit},k} + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{m}_{\mathrm{spin},k} \quad (4.18)$$

voor een stelsel deeltjes.

Voor een zwerm deeltjes waarvan overeenkomstig de in Par. 2 behandelde theorie de concentratie $N = N(\mathbf{r},t)$ kan worden ingevoerd, kunnen wij de ruimtelijke dichtheid van magnetisch moment $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ ten opzichte van een vaste oorsprong $\mathcal{O}$ invoeren. Laat $\mathcal{V}$ een begrensd gebied in de ruimte zijn, waarin zich deeltjes bevinden. Laat ΔV de inhoud zijn van een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathcal{V}$ van $\mathcal{V}$ dat een punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat. Laat ΔN het aantal op het tijdstip t in $\Delta\mathcal{V}$ aanwezige deeltjes zijn, dan wordt de ruimtelijke dichtheid van magnetisch moment ingevoerd als

$$\mathbf{M} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Delta\mathcal{V}\to\mathcal{V}_{\mathrm{gr}}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} \mathbf{m}_k . \quad (4.19)$$

Op grond van (2.1) is hiervoor ook te schrijven

$$\mathbf{M} = N \lim_{\Delta\mathcal{V}\to\mathcal{V}_{\mathrm{gr}}} \langle \mathbf{m} \rangle . \quad (4.20)$$

In de limiet in het rechterlid van (4.19) en (4.20) is $\mathscr{V}_{gr}$ wederom een korrel in het gebied waar de zwerm deeltjes aanwezig is en blijft $\mathbf{r}$ een inwendig punt van $\mathscr{V}_{gr}$. Op grond van de continuümshypothese is de aldus ingevoerde $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$. Met behulp van de definitie (4.19) is voor het totale magnetische moment $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$ van de in het gebied $\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes te schrijven

$$\mathbf{m} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{M}\, \mathrm{d}V. \tag{4.21}$$

De grootheid $\mathbf{M}$ wordt ook wel de *magnetisatie* genoemd (zie ook Par. 9).

Tot slot zijn in Tabel 4 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 4. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
elektrisch moment	$\mathbf{p}$	coulomb meter	Cm
magnetisch moment	$\mathbf{m}$	ampère meterkwadraat	$\mathrm{Am^2}$
elektrische polarisatie	$\mathbf{P}$	coulomb per vierkante meter	$\mathrm{C/m^2}$
magnetisatie	$\mathbf{M}$	ampère per meter	A/m

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 4.1. Een puntlading ter sterkte q bevindt zich op vectoriële afstand $\mathbf{d}$ van een puntlading ter sterkte $-q$. Bepaal het elektrische moment $\mathbf{p}$ van het tweetal ladingen.
Antwoord: $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$.

Vraagstuk 4.2. In een begrensd gebied $\mathscr{V}$ bevindt zich een zwerm geladen deeltjes waarvoor via de in Par. 2 behandelde methode de ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ kan worden ingevoerd. Leid af, dat in dit geval $\mathbf{P} = \rho\mathbf{r}$. (Aanwijzing: maak gebruik van Vergelijking (4.8) en breng in rekening, dat $\mathbf{r}_k \simeq \mathbf{r}$ voor alle deeltjes in $\mathscr{V}_{gr}$ met $\mathbf{r}$ als inwendig punt.) Onder welke voorwaarde is $\mathbf{p} = \iiint_{\mathscr{V}} \rho\mathbf{r}\, \mathrm{d}V$ onafhankelijk van de keuze van de oorsprong?
Antwoord: als $\iiint_{\mathscr{V}} \rho\, \mathrm{d}V = 0$.

Vraagstuk 4.3. Op het enkelvoudig gesloten oppervlak $\mathscr{S}$ van een metalen geleider bevindt zich elektrische lading met oppervlakteladingsdichtheid σ. (a) Bepaal het elektrische moment $\mathbf{p}$ van de ladingsverdeling. (b) Onder welke voorwaarde is $\mathbf{p}$ onafhankelijk van de keuze van de oorsprong?
Antwoord: (a) $\mathbf{p} = \iint_{\mathscr{S}} \sigma \mathbf{r}\, dA$; (b) als $\iint_{\mathscr{S}} \sigma\, dA = \mathbf{0}$.

Vraagstuk 4.4. Twee identieke, evenwijdige, oneindig dunne, vlakke metalen platen bevinden zich op vectoriële afstand $\mathbf{d}$ van elkaar. Op de ene plaat is een totale lading Q aanwezig, op de andere plaat een totale lading $-Q$. Bepaal het elektrische moment van de configuratie in de onderstelling, dat de verdeling van Q over de ene plaat dezelfde is als de verdeling van $-Q$ over de andere plaat. (De verdeling behoeft niet uniform te zijn!)
Antwoord: $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$, waarin $\mathbf{d}$ de vectoriële afstand is van de plaat met lading $-Q$ naar de plaat met lading Q.

Vraagstuk 4.5. In een bol met straal a bevindt zich een uniform verdeelde lading $-Q$. Op vectoriële afstand $\mathbf{d}$ van het middelpunt van de bol bevindt zich een puntlading Q. Bepaal: (a) de ruimtelijke ladingsdichtheid ρ van de uniform verdeelde lading; (b) het elektrische moment $\mathbf{p}$ van de configuratie. (Aanwijzing: bewijs eerst, dat het elektrische moment van de uniform over de bol verdeelde lading nul is ten opzichte van het middelpunt van de bol, omdat $\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{r}\, dV = \mathbf{0}$, waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector van het middelpunt van de bol naar een willekeurig punt is.)
Antwoord: (a) $\rho = -3Q/4\pi a^3$; (b) $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$. (Opmerking: de configuratie is een klassiek model van een gepolariseerd atoom; de eigenschap $\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{r}\, dV = \mathbf{0}$ geldt voor ieder gebied met een centrum van symmetrie, als $\mathbf{r}$ de plaatsvector van dit centrum af voorstelt.)

Vraagstuk 4.6. In een begrensd gebied $\mathscr{V}$ bevindt zich een zwerm geladen deeltjes waarvoor via de in Par. 2 behandelde methode de convectiestroomdichtheid $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ kan worden ingevoerd. Leid af, dat in dit geval $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{J}$. (Aanwijzing: maak gebruik van de Vergelijkingen (4.11) en (4.19) en breng in rekening, dat $\mathbf{r}_k \simeq \mathbf{r}$ voor alle deeltjes in $\mathscr{V}_{gr}$ met $\mathbf{r}$ als inwendig punt.) Onder welke voorwaarde is $\mathbf{m} = \iiint_{\mathscr{V}} \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{J}\, dV$ onafhankelijk van de keuze van de oorsprong?
Antwoord: als $\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{J}\, dV = \mathbf{0}$.

Vraagstuk 4.7. Een enkelvoudig gesloten, lijnvormige geleider $\mathscr{C}$ wordt door een overal even sterke stroom I doorlopen. Bepaal met behulp van het in Vraagstuk 4.6 afgeleide resultaat het magnetische moment $\mathbf{m}$ van deze „kringstroom" en herleid het resultaat. (Aanwijzing: maak gebruik van de eigenschap, dat $\mathbf{J}\, dV = I\boldsymbol{\tau}\, ds$ voor een lijnvormige geleider; hierin is $\boldsymbol{\tau}$ de eenheidsvector langs de raaklijn aan $\mathscr{C}$. Gebruik verder de variant van de stelling van STOKES $\oint_{\mathscr{C}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}\, ds = -\iint_{\mathscr{S}} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{r}\, dA$, waarin $\mathscr{S}$ een begrensd, tweezijdig oppervlak is dat $\mathscr{C}$ tot randkromme heeft en $\mathbf{n}$ de rechts-cyclisch aan $\boldsymbol{\tau}$ toegevoegde eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ voorstelt, alsmede de formule $(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{n}$.)
Antwoord: $\mathbf{m} = \frac{1}{2}I \oint_{\mathscr{C}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}\, ds = I \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\, dA = I\mathbf{A}$, waarin $\mathbf{A}$ de vectoriële oppervlakte van $\mathscr{C}$ voorstelt.

Vraagstuk 4.8. Een cilindrische spoel wordt doorlopen door een stationaire stroom I, die in iedere langsdoorsnede op dezelfde wijze over de hoogte is verdeeld. De dikte van de wikkeling mag worden verwaarloosd; de vectoriële oppervlakte van de dwarsdoorsnede zij $\mathbf{A}$. (a) Bepaal het magnetische moment $\mathbf{m}$ van de spoel. (b) Hoe luidt het

antwoord, indien de spoel uit n windingen bestaat die ieder door een stroom I worden doorlopen?
Antwoord: (a) $\mathbf{m} = I\mathbf{A}$; (b) $\mathbf{m} = nI\mathbf{A}$.

Vraagstuk 4.9. Een deeltje met massa M en lading $-Q$ doorloopt een gesloten baan onder invloed van een centraal krachtveld (b.v. het elektrostatische veld van een in het centrum $\mathcal{O}$ geplaatste lading Q). De omlooptijd van het deeltje zij T, de vectoriële oppervlakte van de baan zij $\mathbf{A}$. Bepaal (a) het baanimpulsmoment $\mathbf{b}_{\text{orbit}}$ en (b) het baanmagnetische moment $\mathbf{m}_{\text{orbit}}$ van het deeltje ten opzichte van het centrum $\mathcal{O}$. (Aanwijzingen: maak gebruik van de bewegingsvergelijking $M\,\mathrm{d}_t\mathbf{v} = \mathbf{F}$ en van de eigenschap, dat $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Hieruit volgt, dat $\mathbf{r} \times M\mathbf{v} = \mathbf{b}_{\text{orbit}}$ een constante vector is; de gesloten baan ligt dus in het platte vlak door $\mathcal{O}$ en $\mathbf{v}$. Verder is $\mathbf{A} = (T/2M)\mathbf{b}_{\text{orbit}}$, hetgeen uit Vergelijking (4.14) volgt.)
Antwoord: (a) $\mathbf{b}_{\text{orbit}} = 2(M/T)\mathbf{A}$; (b) $\mathbf{m}_{\text{orbit}} = -(Q/T)\mathbf{A}$.

Vraagstuk 4.10. Een bol met straal a, uniform verdeelde massa M en uniform verdeelde lading Q wentelt met vectoriële hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ om een as door zijn middelpunt. Bepaal (a) het impulsmoment $\mathbf{b}$ en (b) het magnetische moment $\mathbf{m}$ van de configuratie ten opzichte van het middelpunt $\mathcal{O}$ van de bol. (Aanwijzingen: maak gebruik van de eigenschap $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector voorstelt van het centrum $\mathcal{O}$ af, en van de formule $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}$ en voer voor het berekenen van de resulterende integralen bolcoördinaten in met $\mathcal{O}$ als oorsprong en de omwentelingsas als poolas.)
Antwoord: (a) $\mathbf{b} = (2/5)Ma^2\boldsymbol{\omega}$; (b) $\mathbf{m} = (1/5)Qa^2\boldsymbol{\omega}$. (Opmerking: door de om zijn as wentelende bol als één enkel deeltje te beschouwen, kan men $\mathbf{b}$ als zijn spinimpulsmoment en $\mathbf{m}$ als zijn spinmagnetische moment opvatten; tussen deze twee grootheden bestaat dan de betrekking $\mathbf{m} = (Q/2M)\mathbf{b}$.)

5. Kracht en koppel op een stelsel ladingen. De elektromagnetische veldvectoren in vacuüm

Uit ervaring is bekend, dat elektrisch geladen deeltjes een mechanische kracht op elkaar uitoefenen; deze kracht hangt af van de onderlinge positie van de deeltjes en van hun bewegingstoestand. Wij beschouwen allereerst de kracht die op één enkel puntvormig, geladen deeltje (een puntlading) werkt en definiëren via deze kracht de elektromagnetische veldvectoren. Dit betekent, dat wij de puntlading als meetobject hanteren om de waarde van de elektromagnetische veldvectoren te bepalen. Daar dit meetobject niet in de materie kan worden geplaatst, kunnen wij op deze manier alleen de *elektromagnetische veldvectoren in vacuüm* definiëren. Omtrent de kracht $\mathbf{F}$ is het volgende uit de waarneming bekend: $\mathbf{F}$ is evenredig met de sterkte q van de puntlading, $\mathbf{F}$ bevat een term die evenredig is met de snelheid $\mathbf{v}$ van de puntlading ten opzichte van de waarnemer en die loodrecht op $\mathbf{v}$ staat, $\mathbf{F}$ bevat een term die onafhankelijk is van $\mathbf{v}$. In overeenstemming met deze ervaringsfeiten stellen wij

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}\,, \tag{5.1}$$

waarin

$\mathbf{F}$ = mechanische kracht,
q = sterkte van de puntlading,
$\mathbf{v}$ = snelheid van de puntlading ten opzichte van de waarnemer,
μ_0 = permeabiliteit van het vacuüm ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/meter),
$\mathbf{E}$ = elektrische veldsterkte ter plaatse van de puntlading,
$\mathbf{H}$ = magnetische veldsterkte ter plaatse van de puntlading.

De constante μ_0 is bepalend voor het gebruikte eenhedenstelsel (de opgegeven waarde van μ_0 is die voor het SI). In de onderstelling, dat de als meetobject gebruikte puntlading een zo kleine sterkte heeft dat de terugwerking ervan op de oorspronkelijk aanwezige configuratie verwaarloosbaar klein is, levert (5.1) de elektrische veldsterkte $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en de magnetische veldsterkte $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ van het oorspronkelijk aanwezige elektromagnetische veld.

Opmerking. De hier geformuleerde onderstelling ligt ten grondslag aan ieder meetsysteem: dit mag nl. de te meten grootheid niet op significante wijze beïnvloeden. De onzekerheidsrelatie van HEISENBERG uit de quantumtheorie bepaalt de ondergrens van deze methode van meten.

Door in (5.1) eerst $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ te kiezen, bepaalt men $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Door daarna aan de puntlading drie lineair onafhankelijke snelheden $\mathbf{v}_{1,2,3}$ te geven (b.v. $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{i}_x$, $\mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{i}_y$, $\mathbf{v}_3 = v_3 \mathbf{i}_z$), bepaalt men $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ uit de bijbehorende $\mathbf{F}_{1,2,3}$ en de inmiddels bekende $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. De grootheid

$$\mathbf{F}_e \stackrel{\text{def}}{=\!=} q\mathbf{E} \tag{5.2}$$

noemt men wel de elektrische kracht; de grootheid

$$\mathbf{F}_m \stackrel{\text{def}}{=\!=} q\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H} \tag{5.3}$$

noemt men wel de magnetische kracht of lorentzkracht (naar H. A. LORENTZ).

Er wordt met nadruk op gewezen, dat de via (5.1) gevonden waarden van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ de betekenis van elektrische resp. magnetische veldsterkte alleen hebben voor de waarnemer die de puntlading als meetobject heeft gehanteerd, waarbij ook voor $\mathbf{F}$ en $\mathbf{v}$ de waarden moeten worden gebruikt die deze grootheden voor hem hebben. Een andere waarnemer, die ten opzichte van de eerste beweegt, vindt voor al deze grootheden andere waarden. Zo geldt voor een waarnemer die met de puntlading van de eerste meebeweegt $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$, dus $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$. Hierbij is gebruik gemaakt van de eigenschap, dat de sterkte van een puntlading dezelfde is voor alle waarnemers en derhalve relativistisch invariant (zie ook de opmerking bij Vraagstuk 6.2). De bestudering van de betrekkingen die er tussen de verschillende grootheden bestaan, als twee waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen, deze meten, vormt het onderwerp van de speciale relativiteitstheorie.

Uitgaande van (5.1) is ook de kracht die op een stelsel mechanisch star met elkaar verbonden, puntvormige geladen deeltjes wordt uitgeoefend, te bepalen. De onderstelling, dat de puntladingen een mechanisch star systeem vormen, betekent, dat het gelijktijdig superponeren van krachten die op onderdelen van het systeem worden uitgeoefend, geoorloofd is. Op deze wijze wordt verkregen

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{F}_k, \tag{5.4}$$

met

$$\mathbf{F}_k = q_k \mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) + q_k \mathbf{v}_k \times \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}_k, t) \qquad (k = 1, \ldots, K). \tag{5.5}$$

Hierin hebben de symbolen de volgende betekenis:

q_k = lading van het k-de deeltje,
$\mathbf{v}_k$ = snelheid van het k-de deeltje,
$\mathbf{r}_k$ = plaatsvector van de oorsprong naar het k-de deeltje,
t = tijd,
$\mathbf{E}$ = elektrische veldsterkte,
$\mathbf{H}$ = magnetische veldsterkte,
μ_0 = permeabiliteit van het vacuüm ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/meter).

Vervolgens onderzoeken wij de kracht die op een zwerm elektrisch geladen deeltjes wordt uitgeoefend wanneer overeenkomstig de in Par. 2 behandelde methode de ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ en de convectiestroomdichtheid $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ kunnen worden ingevoerd. Laat $\mathscr{V}$ een begrensd gebied in de ruimte zijn, waarin zich geladen deeltjes bevinden. Laat ΔV de inhoud zijn van een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathscr{V}$ van $\mathscr{V}$ dat een punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat. Noem ΔN het aantal op het tijdstip t in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes en laat $\mathscr{V}_{gr}$ wederom een kleinste korrel van het beschouwde materiaal aangeven. In de onderstelling, dat de in het materiaal op de afzonderlijke geladen deeltjes binnen $\Delta\mathscr{V}$ werkende krachten gelijktijdig gesuperponeerd kunnen worden, voeren wij de ruimtelijke dichtheid van elektromagnetische kracht in via

$$\mathbf{f} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathscr{V} \to \mathscr{V}_{gr}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} [q_k \mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) + q_k \mathbf{v}_k \times \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}_k, t)]. \qquad (5.6)$$

Wij onderstellen nu, dat $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ continue functies van $\mathbf{r}$ zijn; dan zijn $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ binnen $\mathscr{V}_{gr}$ – op van hogere orde kleine grootheden na – constant, d.w.z.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{en} \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r}_k, t) \simeq \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \qquad (k = 1, \ldots, \Delta N). \qquad (5.7)$$

Met behulp van de definities (2.18) en (2.19) voor ρ resp. $\mathbf{J}$, is dan (5.6) te herleiden tot

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mu_0 \mathbf{H}. \qquad (5.8)$$

Op grond van de continuümshypothese is de aldus verkregen $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$. Welke mechanische gevolgen de werking van $\mathbf{f}$ op de zwerm geladen deeltjes als geheel heeft, hangt af van de aard van de mechanische verbindingen die verder tussen de deeltjes aanwezig zijn. Indien al deze verbindingen mechanisch star zijn, kunnen de bijdragen van de elementaire deelgebieden tot de kracht alle gelijktijdig

worden gesuperponeerd en wordt voor de totale kracht $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ op de zwerm deeltjes gevonden

$$\mathbf{F} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{f}\, \mathrm{d}V . \tag{5.9}$$

Behalve de kracht $\mathbf{F}$ die op een systeem werkt, is ook het mechanische moment $\mathbf{T}$ van deze kracht ten opzichte van een vaste oorsprong $\mathcal{O}$ van belang. Dit mechanische moment wordt gedefinieerd als

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{F} , \tag{5.10}$$

waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector van de oorsprong $\mathcal{O}$ naar het punt waar de kracht aangrijpt, voorstelt.

Voor een stelsel elektrisch geladen deeltjes die onderling mechanisch star met elkaar zijn verbonden, kunnen de bij de deeltjes behorende mechanische momenten $\mathbf{T}_k$ $(k = 1, \ldots, K)$ gelijktijdig worden gesuperponeerd. Zodoende wordt voor het totale mechanische moment verkregen

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{T}_k , \tag{5.11}$$

met

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k \qquad (k = 1, \ldots, K) , \tag{5.12}$$

waarin $\mathbf{F}_k$ is gegeven door (5.5).

Voor een zwerm elektrisch geladen deeltjes waarvoor de ruimtelijke dichtheid van kracht $\mathbf{f}$ kan worden ingevoerd, kan ook de ruimtelijke dichtheid van mechanisch moment $\mathbf{t}$ worden ingevoerd. Deze grootheid is gegeven door

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} , \tag{5.13}$$

waarin $\mathbf{f}$ is gegeven door (5.8).

Indien de totale op een systeem werkende kracht gelijk is aan de nulvector, is het mechanische moment van deze kracht onafhankelijk van de keuze van de oorsprong en is het samenstel van krachten equivalent met een koppel dat op het systeem werkt.

Een dergelijk koppel wordt ook uitgeoefend op een deeltje dat een spinmagnetisch moment bezit en in een magnetisch veld wordt geplaatst. Hiervoor blijkt te gelden

$$\mathbf{T} = \mathbf{m}_{\text{spin}} \times \mu_0 \mathbf{H} , \tag{5.14}$$

waarin

$\mathbf{T}$ = mechanisch moment van het koppel werkend op het deeltje,
$\mathbf{m}_{spin}$ = spinmagnetisch moment van het deeltje,
μ_0 = permeabiliteit van het vacuüm ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/meter),
$\mathbf{H}$ = magnetische veldsterkte.

Voor een zwerm deeltjes waarvoor de ruimtelijke dichtheid van spinmagnetisch moment $\mathbf{M}_{spin}$ kan worden ingevoerd, kan ook de ruimtelijke dichtheid van mechanisch moment $\mathbf{t}$ van het op de deeltjes werkende koppel worden ingevoerd. Hiervoor wordt gevonden

$$\mathbf{t} = \mathbf{M}_{spin} \times \mu_0 \mathbf{H}\,, \tag{5.15}$$

waarin $\mathbf{M}_{spin}$ is ingevoerd via (4.19).

Welke mechanische gevolgen de werking van $\mathbf{t}$ op de zwerm deeltjes als geheel heeft, hangt af van de aard van de mechanische verbindingen die verder tussen de deeltjes aanwezig zijn. Indien al deze verbindingen mechanisch star zijn, kunnen de bijdragen van de elementaire deelgebieden tot het mechanische moment alle gelijktijdig worden gesuperponeerd en wordt voor het totale mechanische moment $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ op de zwerm deeltjes gevonden

$$\mathbf{T} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{t}\, \mathrm{d}V\,, \tag{5.16}$$

waarin – zoals uit (5.13), (5.8) en (5.15) volgt –

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mu_0 \mathbf{H}) + \mathbf{M}_{spin} \times \mu_0 \mathbf{H}\,. \tag{5.17}$$

Tot slot zijn in Tabel 5 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 5. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
kracht	**F**	newton	N
moment van kracht (koppel)	**T**	newton meter	Nm
volumedichtheid van kracht	**f**	newton per kubieke meter	N/m^3
volumedichtheid van moment van kracht (koppel)	**t**	newton per vierkante meter	N/m^2
elektrische veldsterkte	**E**	volt per meter	V/m
magnetische veldsterkte	**H**	ampère per meter	A/m
permeabiliteit van het vacuüm	μ_0	henry per meter	H/m

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 5.1. De kracht **F** op een puntvormig deeltje met elektrische lading q wordt gebruikt om de elektrische veldsterkte **E** en de magnetische veldsterkte **H** te bepalen. Druk (a) **E** uit in **F** voor $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, (b) **H** uit in $\mathbf{F}_{1,2,3}-q\mathbf{E}$, indien voor **v** achtereenvolgens $\mathbf{v}_1=v_1\mathbf{i}_x$, $\mathbf{v}_2=v_2\mathbf{i}_y$, $\mathbf{v}_3=v_3\mathbf{i}_z$ wordt gekozen.
Antwoord: (a) $\mathbf{E}=\mathbf{F}/q$ voor $\mathbf{v}=\mathbf{0}$;

(b)
$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ v_1 & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_1/q-\mathbf{E})/\mu_0,$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ 0 & v_2 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_2/q-\mathbf{E})/\mu_0,$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ 0 & 0 & v_3 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = (\mathbf{F}_3/q-\mathbf{E})/\mu_0.$$

Vraagstuk 5.2. Twee puntladingen ter sterkte q, resp. $-q$, zijn mechanisch star met elkaar verbonden. De vectoriële afstand van de lading ter sterkte $-q$ tot de lading ter sterkte q bedraagt **d**. Deze „elektrische halter" bevindt zich in een uniform elektrisch veld **E**. Bepaal (a) de resulterende kracht, (b) het mechanische moment van het resulterende koppel op de elektrische halter.
Antwoord: (a) $\mathbf{F}=\mathbf{0}$; (b) $\mathbf{T}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$, waarin $\mathbf{p}=q\mathbf{d}$ het elektrische moment van de ladingen is.

Vraagstuk 5.3. Door een enkelvoudig gesloten, mechanisch starre, draadvormige geleider $\mathscr{C}$ loopt een overal even sterke stroom I. Deze „kringstroom" bevindt zich in een uniform magnetisch veld $\mathbf{H}$. Bepaal (a) de resulterende kracht, (b) het mechanische moment van het resulterende koppel op de kringstroom. (Aanwijzingen: maak gebruik van de eigenschap, dat $\mathbf{J}\,\mathrm{d}V = I\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$ voor een lijnvormige geleider; hierin is $\boldsymbol{\tau}$ de eenheidsvector langs de raaklijn aan $\mathscr{C}$. Gebruik verder de eigenschap $\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = \mathbf{0}$, de formules $\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{H}) = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})\boldsymbol{\tau} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\tau})\mathbf{H}$, $\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{r} = \mathbf{0}$, de stelling van STOKES en de variant $\oint_{\mathscr{C}} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} [\mathbf{n}\times\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})]\,\mathrm{d}A$ hiervan.)
Antwoord: (a) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; (b) $\mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mu_0\mathbf{H}$, waarin $\mathbf{m} = I\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\,\mathrm{d}A = I\mathbf{A}$ het magnetische moment van de kringstroom is (zie Vraagstuk 4.7).

Vraagstuk 5.4. Een bol met middelpunt $\mathcal{O}$, straal a, uniform verdeelde massa M en uniform verdeelde lading Q wentelt met vectoriële hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ om een as door zijn middelpunt. De bol bevindt zich in een statisch magnetisch veld, waarvan de sterkte in het gebied dat de bol inneemt, constant ondersteld mag worden en gelijk aan $\mathbf{H}$. Bepaal (a) de resulterende kracht $\mathbf{F}$ en (b) het mechanische moment $\mathbf{T}$ van het resulterende koppel op de tollende ladingsverdeling. (Aanwijzingen: maak gebruik van de Vergelijkingen (5.9) en (5.16) met $\mathbf{f} = \mathbf{J}\times\mu_0\mathbf{H}$, $\mathbf{t} = \mathbf{r}\times\mathbf{f}$, $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ af voorstelt. Hiermee verkrijgt men $\mathbf{f} = \rho\mu_0(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{H}$ en $\mathbf{t} = \rho\mu_0\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{H})]$. Voer voor het berekenen van de resulterende integralen bolcoördinaten in met $\mathcal{O}$ als oorsprong en de richting van $\mathbf{H}$ als poolas.)
Antwoord: (a) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, (b) $\mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mu_0\mathbf{H}$, waarin $\mathbf{m} = (1/5)Qa^2\boldsymbol{\omega}$ het magnetische moment van de om zijn as wentelende bol voorstelt (zie Vraagstuk 4.10).

Vraagstuk 5.5. Een star lichaam met verdeelde lading Q en op dezelfde wijze verdeelde massa M wentelt met vectoriële hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ om een as door zijn ladings- en massamiddelpunt $\mathcal{O}$. Dit lichaam bevindt zich in een statisch magnetisch veld, waarvan de sterkte in het gebied dat het lichaam inneemt, constant ondersteld mag worden en gelijk aan $\mathbf{H}$. Als gevolg hiervan ondervindt het lichaam een koppel waarvan het mechanische moment $\mathbf{T}$ gegeven wordt door $\mathbf{T} = \mathbf{m}\times\mu_0\mathbf{H}$. Anderzijds geldt voor de mechanische beweging van het lichaam $\mathrm{d}_t\mathbf{b} = \mathbf{T}$. Bepaal de bewegingsvergelijking van het lichaam. (Aanwijzing: maak gebruik van de eigenschap $\mathbf{m} = (Q/2M)\mathbf{b}$.)
Antwoord: $\mathrm{d}_t\mathbf{b} = (Q/2M)\mathbf{b}\times\mu_0\mathbf{H}$ of $\mathrm{d}_t\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}_L\times\mathbf{b}$, waarin $\boldsymbol{\omega}_L \overset{\text{def}}{=} -Q\mu_0\mathbf{H}/2M$ de larmorfrequentie van het lichaam heet. (Merk op, dat de bewegingsvergelijking van hetzelfde type is als Vergelijking (6.28).)

Vraagstuk 5.6. Bewijs, dat het mechanische moment van de totale op een systeem werkende kracht onafhankelijk is van de keuze van de oorsprong, indien deze kracht gelijk is aan de nulvector. (Aanwijzing: bepaal het mechanische moment $\mathbf{T}'$ ten opzichte van een van $\mathcal{O}$ verschillende oorsprong $\mathcal{O}'$ en laat zien, dat $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$, als $\mathbf{T}$ het mechanische moment ten opzichte van $\mathcal{O}$ voorstelt.)

6. Beweging van een elektrisch geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld

De berekening van de beweging van een elektrisch geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld is een probleem met toepassingen in o.a. de theorie van de werking van een elektronenbuis (b.v. een televisiebeeldbuis, een magnetron, een klystron of een lopendegolfbuis), de theorie van de beeldvorming in een elektronenmicroscoop en de theorie van de werking van een deeltjesversneller (cyclotron, betatron, synchrotron). In al deze toepassingen is de concentratie van de deeltjes zo gering, dat zij als vrij bewegend mogen worden beschouwd, hetgeen betekent, dat de invloed van de botsingen tussen de deeltjes onderling kan worden verwaarloosd. In dit geval is de enige kracht van mechanische aard die op het deeltje werkt, de traagheidskracht, zodat

$$\mathrm{d}_t\{m_0\mathbf{v}/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = \mathbf{F}, \tag{6.1}$$

waarin

m_0 = rustmassa van het deeltje,
$\mathbf{v}$ = snelheid van het deeltje ten opzichte van de waarnemer,
c_0 = voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven in vacuüm,
$\mathbf{F}$ = mechanische kracht die op het deeltje werkt.

Opmerking. Daar alle in (6.1) optredende grootheden reëel zijn, heeft de uitdrukking $[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}$ alleen betekenis als $0 \leq \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \leq c_0^2$.

De experimenteel gevonden waarde van c_0 is

$$c_0 = 2.9979 \times 10^8 \text{ meter/seconde.}$$

De bewegingsvergelijking (6.1) is relativistisch correct. Indien $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2$, hetgeen in veel toepassingen het geval is, is (6.1) te benaderen door

$$m_0\,\mathrm{d}_t\mathbf{v} = \mathbf{F} \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2). \tag{6.2}$$

Het aan elkaar gelijk stellen van de beide uitdrukkingen (5.1) en (6.1) voor de mechanische kracht **F** levert de bewegingsvergelijking voor een geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld, nl.

$$\mathrm{d}_t\{m_0\mathbf{v}/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = q\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\times\mu_0\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{6.3}$$

waarin

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}_t\mathbf{r}\,. \tag{6.4}$$

In de niet-relativistische benadering wordt uit (5.1) en (6.2) gevonden

$$m_0\,\mathrm{d}_t\mathbf{v} = q\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}\times\mu_0\,\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\ll c_0^2). \tag{6.5}$$

Indien ten tijde $t=t_0$ de positie $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t_0)$ en de snelheid $\mathbf{v}_0=\mathbf{v}(t_0)$ van het deeltje gegeven zijn, is uit de differentiaalvergelijking (6.3), waarin (6.4) moet worden gesubstitueerd, de baan $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ van het deeltje voor $t>t_0$ te berekenen. In de niet-relativistische benadering wordt (6.5) als differentiaalvergelijking gebruikt; deze laatste vergelijking is aanzienlijk eenvoudiger dan (6.3).

De mechanische arbeid die het elektromagnetische veld op het deeltje verricht, dient voor de verandering van de energie van het deeltje. Daar wij met een vrij deeltje te maken hebben, is kinetische energie de enige vorm van mechanische energie die het deeltje bezit. Voor het toenemingstempo $\mathrm{d}_tE_{\mathrm{kin}}$ van de kinetische energie E_{kin} geldt derhalve

$$\mathrm{d}_tE_{\mathrm{kin}} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{6.6}$$

Substitutie van (6.1) in het rechterlid van (6.6) geeft

$$\mathrm{d}_tE_{\mathrm{kin}} = \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}_t\{m_0\mathbf{v}/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\}. \tag{6.7}$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}_t\{m_0\mathbf{v}[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-\frac{1}{2}}\} &= \mathbf{v}\cdot\{m_0[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}_t\mathbf{v}\\ &+ m_0[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-3/2}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}_t\mathbf{v})/c_0^2\}\\ &= m_0[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-3/2}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}_t\mathbf{v} = \mathrm{d}_t\{m_0c_0^2[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-\frac{1}{2}}\}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Hiermee kan (6.7) worden herschreven als

$$\mathrm{d}_tE_{\mathrm{kin}} = \mathrm{d}_t\{m_0c_0^2/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\}, \tag{6.9}$$

zodat

$$E_{\mathrm{kin}} = m_0c_0^2/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}} + \text{constante}. \tag{6.10}$$

Uit experimenten blijkt, dat de rustenergie van een deeltje met rustmassa m_0 gelijk is aan $m_0c_0^2$ (wet van EINSTEIN); derhalve moet gelden

$$\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{0}} E_{\mathrm{kin}} = m_0c_0^2. \tag{6.11}$$

Uit (6.10) en (6.11) blijkt, dat de constante in (6.10) gelijk aan nul gesteld moet worden, zodat voor iedere snelheid geldt

$$E_{\text{kin}} = m_0 c_0^2/[1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{6.12}$$

Voor $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2$ vindt men uit (6.12)

$$E_{\text{kin}} \simeq m_0 c_0^2 + \tfrac{1}{2} m_0\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2). \tag{6.13}$$

In de niet-relativistische mechanica rekent men de rustenergie van het deeltje (die toch niet langs mechanische weg te beïnvloeden is) niet tot de kinetische energie en houdt men $\frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ als kinetische energie over.

In het rechterlid van (6.6) kan men ook de uitdrukking (5.1) voor $\mathbf{F}$ substitueren. Het resultaat hiervan is

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,, \tag{6.14}$$

daar $\mathbf{v}\cdot(q\mathbf{v}\times\mu_0\mathbf{H}) = 0$. Dit betekent, dat het magnetische veld geen mechanische arbeid verricht; dit komt, omdat de magnetische kracht $\mathbf{F}_m$ (zie (5.3)) altijd loodrecht op de snelheid $\mathbf{v}$ is gericht. Uit (6.6), (6.9) en (6.14) volgt, dat

$$\mathrm{d}_t\{m_0 c_0^2/[1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}. \tag{6.15}$$

Deze *energievergelijking* speelt een belangrijke rol bij verschillende berekeningen. In de niet-relativistische benadering gaat (6.15) over in

$$\mathrm{d}_t(\tfrac{1}{2} m_0\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \qquad (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2), \tag{6.16}$$

daar $\mathrm{d}_t(m_0 c_0^2) = 0$.

Enkele eenvoudige gevallen van de beweging van een elektrisch geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld zullen nader worden behandeld, te weten: (a) de beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, elektrisch veld en (b) de beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, magnetisch veld.

(a) *Beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, elektrisch veld*

De bewegingsvergelijking voor een geladen deeltje in een uniform, statisch, elektrisch veld $\mathbf{E}_0$ wordt gevonden door in (6.3) te substitueren $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ en $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Het resultaat is

$$\mathrm{d}_t\{m_0 \mathbf{v}/[1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = q\mathbf{E}_0. \tag{6.17}$$

Wij onderstellen, dat ten tijde $t = 0$ het deeltje in rust is en zich in de

oorsprong van het coördinatenstelsel bevindt, dus $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ en $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. Uit (6.17) volgt, dat het deeltje dan voor $t > 0$ alleen een snelheid in de richting van $\mathbf{E}_0$ zal krijgen. Indien wij de x-as van het coördinatenstelsel langs $\mathbf{E}_0$ leggen, kunnen wij schrijven

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{i}_x, \quad \mathbf{v} = v\mathbf{i}_x, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i}_x. \tag{6.18}$$

Hiermee gaat (6.17) over in

$$\mathrm{d}_t\{m_0 v/(1-v^2/c_0^2)^{\frac{1}{2}}\} = qE_0. \tag{6.19}$$

Toepassen van de operator $\int_0^t \mathrm{d}t$ op (6.19) geeft, daar $v(0) = 0$,

$$v/(1-v^2/c_0^2)^{\frac{1}{2}} = (qE_0/m_0)\, t \qquad \text{voor } t > 0. \tag{6.20}$$

Hieruit volgt

$$v = c_0 t/[t^2 + (m_0 c_0/qE_0)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{voor } t > 0. \tag{6.21}$$

Uit dit resultaat blijkt, dat altijd $v < c_0$ en dat $\lim_{t\to\infty} v = c_0$, hetgeen in overeenstemming is met de verwachting op grond van de relativiteitstheorie. Om de plaats van het deeltje te bepalen, passen wij op (6.21) de operator $\int_0^t \mathrm{d}t$ toe. Daar $v = \mathrm{d}_t x$ en $x(0) = 0$, vindt men

$$x = c_0[t^2 + (m_0 c_0/qE_0)^2]^{\frac{1}{2}} - m_0 c_0^2/qE_0 \qquad \text{voor } t > 0. \tag{6.22}$$

Uit dit resultaat volgt $x = c_0 t - m_0 c_0^2/qE_0 + O(t^{-1})$ voor $t \to \infty$.

(b) *Beweging van een geladen deeltje in een uniform, statisch, magnetisch veld*

De bewegingsvergelijking voor een geladen deeltje in een uniform, statisch, magnetisch veld $\mathbf{H}_0$ wordt gevonden door in (6.3) te substitueren $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Het resultaat is

$$\mathrm{d}_t\{m_0 \mathbf{v}/[1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = q\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}_0. \tag{6.23}$$

Uit de energievergelijking (6.15) volgt voor dit geval

$$m_0 c_0^2/[1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}} = \text{constante}, \tag{6.24}$$

of

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \text{constante}. \tag{6.25}$$

Toepassen van de operator d_t op (6.25) leidt tot

$$\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}_t\mathbf{v} = 0. \tag{6.26}$$

Uitwerken van de bewegingsvergelijking (6.23) geeft, met gebruikmaking van (6.26),

$$m_0[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}_t\mathbf{v} = q\mathbf{v}\times\mu_0\mathbf{H}_0. \tag{6.27}$$

Deze vergelijking is te herschrijven in de standaardvorm

$$\mathrm{d}_t\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_c\times\mathbf{v}, \tag{6.28}$$

waarin

$$\boldsymbol{\omega}_c \overset{\text{def}}{=\!=} -(q\mu_0\mathbf{H}_0/m_0)\,[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}} \tag{6.29}$$

de *cyclotronfrequentie* van het deeltje heet. Opgemerkt wordt, dat (6.28) in overeenstemming is met (6.26).

Het oplossen van het stelsel differentiaalvergelijkingen (6.28) geschiedt het eenvoudigst door gebruik te maken van een Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan de z-as langs $-\mathbf{H}_0$, dus langs $\boldsymbol{\omega}_c$ valt. Met $\boldsymbol{\omega}_c = \omega_c\mathbf{i}_z$ gaat (6.28) dan over in

$$\mathrm{d}_t\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_c & 0 \\ \omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

De oplossing van dit stelsel kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_x(0)\cos(\omega_c t) - v_y(0)\sin(\omega_c t), \\ v_y(t) &= v_x(0)\sin(\omega_c t) + v_y(0)\cos(\omega_c t), \\ v_z(t) &= v_z(0). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Met behulp van dit resultaat wordt voor de baan van het deeltje gevonden

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + [v_x(0)/\omega_c]\sin(\omega_c t) - [v_y(0)/\omega_c][1-\cos(\omega_c t)], \\ y(t) &= y(0) + [v_x(0)/\omega_c][1-\cos(\omega_c t)] + [v_y(0)/\omega_c]\sin(\omega_c t), \\ z(t) &= z(0) + v_z(0)t. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Uit de eerste en de tweede vergelijking van (6.32) volgt

$$\begin{aligned} &[x(t) - x(0) + v_y(0)/\omega_c]^2 + [y(t) - y(0) - v_x(0)/\omega_c]^2 \\ &= [v_x(0)^2 + v_y(0)^2]/\omega_c^2. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Dit is de vergelijking van een cirkel met straal $a = [v_x(0)^2 + v_y(0)^2]^{\frac{1}{2}}/\omega_c$; de coördinaten van het middelpunt $\mathscr{C}$ zijn gegeven door $x_{\mathscr{C}} = x(0) - v_y(0)/\omega_c$, $y_{\mathscr{C}} = y(0) + v_x(0)/\omega_c$. Uit (6.33) en de laatste vergelijking van (6.32) volgt, dat de doorlopen baan van het deeltje een schroeflijn is op

een cirkelcilinder met straal $a=[v_x(0)^2+v_y(0)^2]^{\frac{1}{2}}/\omega_c$ en as evenwijdig aan $\mathbf{H}_0$. De tijdsduur die nodig is om één winding te doorlopen, bedraagt $T=2\pi/\omega_c$; de spoed bedraagt $v_z(0)\,T=2\pi v_z(0)/\omega_c$. De situatie is weergegeven in Fig. 9.

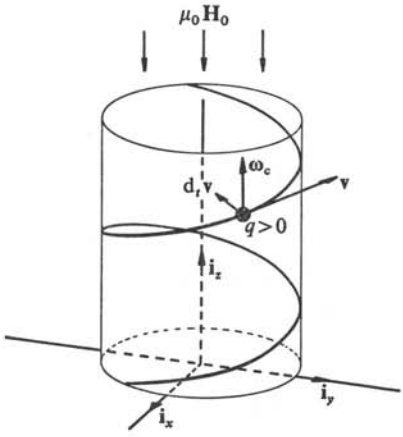


Fig. 9. Beweging van een elektrisch geladen deeltje met lading $q>0$ in een uniform, statisch, magnetisch veld met magnetische veldsterkte $\mathbf{H}_0$.

Voor de berekening van de baan van een geladen deeltje in een gegeven elektromagnetisch veld in ingewikkelder configuraties verwijzen wij naar CLEMMOW and DOUGHERTY [8].

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 6.1. In de vergelijking $\mathrm{d}_t E_{\mathrm{kin}}=q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$, die uit de Vergelijkingen (6.6) en (6.14) volgt, nemen wij voor $\mathbf{E}$ een tijdonafhankelijk elektrisch veld $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Op grond van de wetten van de elektrostatica is dan $\mathbf{E}=-\mathbf{grad}\,V$, waarin $V=V(\mathbf{r})$ de elektrostatische potentiaal voorstelt. Laat zien, dat uit $\mathrm{d}_t E_{\mathrm{kin}}=-q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,V$ volgt, dat $E_{\mathrm{kin}}(t_2)-E_{\mathrm{kin}}(t_1)=-q[V(\mathbf{r}_2)-V(\mathbf{r}_1)]=q[V(\mathbf{r}_1)-V(\mathbf{r}_2)]$, waarin $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}(t_1)$ en $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}(t_2)$. (Aanwijzing: gebruik de betrekkingen $\mathbf{v}\,\mathrm{d}t=\mathbf{dr}$ en $(\mathbf{grad}\,V)\cdot\mathbf{dr}=\mathrm{d}V$.)

Vraagstuk 6.2. Een elektrisch geladen deeltje beweegt zich in een vlak loodrecht op de richting van een uniform, statisch, magnetisch veld. Bewijs met behulp van Vergelijking (6.32), dat de doorlopen baan een cirkel is. Bepaal (a) de vergelijking van deze cirkel,

8. CLEMMOW, P. C. and J. P. DOUGHERTY, *Electrodynamics of particles and plasmas*. Reading (Massachusetts), Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

(b) de straal a van de cirkel en (c) de coördinaten van het middelpunt $\mathscr{C}$ van de cirkel. *Antwoord:* (a) $[x(t)-x(0)+v_y(0)/\omega_c]^2+[y(t)-y(0)-v_x(0)/\omega_c]^2=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/\omega_c^2$; (b) $a=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}/\omega_c$; (c) $x_{\mathscr{C}}=x(0)-v_y(0)/\omega_c$, $y_{\mathscr{C}}=y(0)+v_x(0)/\omega_c$. (Opmerking: In de afleiding van Vergelijking (6.32) is ondersteld, dat de lading van een deeltje een relativistisch invariante grootheid is. Het feit, dat de onder (b) verkregen waarde van a in overeenstemming is met het experiment, bewijst dat de genoemde onderstelling gerechtvaardigd is.)

Vraagstuk 6.3. Geef de uitdrukking voor de cyclotronfrequentie $f_c=\omega_c/2\pi$ van een elektron ($q=-e=-1.6022\times10^{-19}$ C, $m_0=9.1096\times10^{-31}$ kg).
Antwoord: $f_c=2.7992\times10^{10}\,\mu_0 H_0[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}$ Hz.

7. De elektromagnetische veldvergelijkingen in vacuüm

Met behulp van de in Par. 5 gegeven definitie van de elektrische veldsterkte $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en de magnetische veldsterkte $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ – beide in vacuüm – kan men langs experimentele weg betrekkingen gaan opsporen tussen $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ in een gebied in vacuüm. De resultaten van deze experimenten zijn als volgt te formuleren. Beschouw $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ in punten die in elkaars nabijheid liggen en op opeenvolgende tijdstippen. Uit deze waarnemingen zijn de eerste orde partiële afgeleiden van de kentallen van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ naar de plaatscoördinaten x, y en z en naar de tijdcoördinaat t te bepalen. Het blijkt dan, dat deze eerste orde partiële afgeleiden in bepaalde lineaire betrekkingen tot elkaar staan. Deze betrekkingen hebben de volgende gedaante

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \mu_0 \partial_t \mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

waarin

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

en

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \tag{7.4}$$

In (7.1) is

$$\varepsilon_0 \overset{\text{def}}{=\!=} (\mu_0 c_0^2)^{-1} \tag{7.5}$$

de *permittiviteit van het vacuüm*. Substitutie van de eerder gegeven waarden $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/meter en $c_0 \simeq 2.9979 \times 10^8$ meter/seconde geeft

$$\varepsilon_0 \simeq 8.8544 \times 10^{-12} \text{ farad/meter}.$$

Vergelijking (7.1) staat bekend als de *eerste vergelijking van* MAXWELL (in vacuüm), vergelijking (7.2) als de *tweede vergelijking van* MAXWELL (in vacuüm). Verder blijkt op grond van de waarnemingen – wederom in vacuüm – te gelden

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \tag{7.6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{7.7}$$

waarin

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \overset{\text{def}}{=\!=} \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z \tag{7.8}$$

en

$$\operatorname{div} \mathbf{H} \overset{\text{def}}{=\!=} \partial_x H_x + \partial_y H_y + \partial_z H_z. \tag{7.9}$$

Wiskundig beschouwd, is (7.6) een voldoende voorwaarde voor het kunnen gelden van (7.1) en (7.7) een voldoende voorwaarde voor het kunnen gelden van (7.2) en wel op grond van de vectoriële identiteiten div **rot** $\mathbf{H} \equiv 0$ en div **rot** $\mathbf{E} \equiv 0$.

De partiële differentiaalvergelijkingen (7.1), (7.2), (7.6) en (7.7) gelden in ieder punt van een in vacuüm gelegen gebied; elk van de erin optredende termen blijkt een continue functie van de plaatscoördinaten te zijn. Met het oog op de verdere ontwikkeling van de theorie van het elektromagnetische veld is het gewenst om te beschikken over vergelijkingen die met (7.1), (7.2), (7.6) en (7.7) gelijkwaardig zijn, doch waarin geen afgeleiden naar de plaatscoördinaten voorkomen. De bedoelde vergelijkingen kunnen worden verkregen door op (7.1), (7.2), (7.6) en (7.7) passende stellingen uit de vectoranalyse toe te passen. Hoe dit gebeurt, wordt hieronder aangegeven.

In de eerste plaats beschouwen wij (7.1) en (7.2). Laat $\mathscr{C}$ een voldoend gladde, begrensde, enkelvoudig gesloten kromme zijn en $\mathscr{S}$ een voldoend glad, begrensd, tweezijdig oppervlak dat $\mathscr{C}$ tot randkromme heeft. Wij kiezen een richting waarin $\mathscr{C}$ wordt doorlopen en noemen de eenheidsvector langs de raaklijn aan $\mathscr{C}$ in deze richting $\boldsymbol{\tau}$; de rechtscyclisch aan $\boldsymbol{\tau}$ toegevoegde eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathbf{n}$ (Fig. 10). In het vervolg zullen wij de configuratie van Fig. 10 aanduiden als „de configuratie waarop de stelling van STOKES toepasselijk is". Wij onderstellen verder, dat $\mathscr{C}$ en $\mathscr{S}$ beide tijdonafhankelijk en geheel in vacuüm gelegen zijn. Toepassing van de stelling van STOKES (zie (B.42)) geeft dan

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H} \, \mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \, \mathrm{d}A \tag{7.10}$$

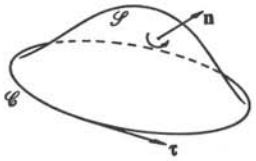


Fig. 10. Configuratie waarop de stelling van STOKES *toepasselijk is.*

en

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E}\,\mathrm{d}A. \tag{7.11}$$

Uit (7.1) wordt dan onder toepassing van (7.10) verkregen

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s = \varepsilon_0\partial_t \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}A \tag{7.12}$$

en uit (7.2) onder toepassing van (7.11)

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}s = -\mu_0\partial_t \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}A. \tag{7.13}$$

In de tweede plaats beschouwen wij (7.6) en (7.7). Laat $\mathscr{S}$ een voldoende glad, begrensd, gesloten oppervlak zijn en $\mathscr{V}$ het begrensde gebied binnen $\mathscr{S}$. De eenheidsvector langs de naar buiten (d.i. van $\mathscr{V}$ af) gerichte normaal op $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathbf{n}$ (Fig. 11). In het vervolg zullen wij de configuratie van Fig. 11 aanduiden als „de configuratie waarop de stelling van GAUSS toepasselijk is". Wij onderstellen verder, dat $\mathscr{S}$ tijdonafhankelijk is (en dus ook $\mathscr{V}$) en dat $\mathscr{S}$ en $\mathscr{V}$ geheel in vacuüm gelegen zijn. Toepassing van de stelling van GAUSS (zie (B.39)) geeft dan

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{7.14}$$

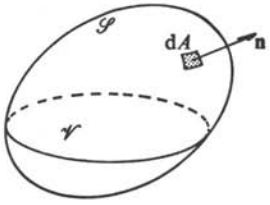


Fig. 11. Configuratie waarop de stelling van GAUSS *toepasselijk is.*

en

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\mathbf{H}\,\mathrm{d}V. \tag{7.15}$$

Uit (7.6) wordt dan onder toepassing van (7.14) verkregen

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{7.16}$$

en uit (7.7) door toepassing van (7.15)

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}A = 0. \tag{7.17}$$

Opgemerkt wordt, dat in (7.12), (7.13), (7.16) en (7.17) geen afgeleiden naar de plaatscoördinaten voorkomen.

Opmerking. Voor het berekenen van de integraal in het rechterlid van (7.12) en (7.13) moet een bepaald oppervlak $\mathscr{S}$ worden gekozen. Welk oppervlak wordt gekozen, doet er niet toe, zolang $\mathscr{S}$ maar $\mathscr{C}$ tot randkromme heeft. Dit betekent, dat in ieder voorkomend geval $\mathscr{S}$ zodanig aan de configuratie kan worden aangepast, dat de berekening van de oppervlakte-integraal het handigst verloopt.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 7.1. Bewijs de bewering in de „Opmerking" op p. 53. (Aanwijzing: kies in het rechterlid van de Vergelijkingen (7.12) en (7.13) twee verschillende oppervlakken $\mathscr{S}_1$ en $\mathscr{S}_2$ om de integraal te berekenen en bewijs, dat op grond van de Vergelijkingen (7.16) en (7.17) beide integralen tot hetzelfde antwoord leiden.)

Vraagstuk 7.2. Leid uit de Vergelijkingen (7.1), (7.2), (7.6) en (7.7) af aan welke vergelijkingen $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ en $f=f(\mathbf{r},t)$ moeten voldoen, opdat het veld $\{\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 f, \mathbf{H}=\mathbf{H}_0 f\}$ een elektromagnetisch veld in vacuüm is; hierin zijn $\mathbf{E}_0$ en $\mathbf{H}_0$ constante vectoren en is de afhankelijkheid van de plaatscoördinaten en van de tijd alleen aanwezig in de scalaire functie $f=f(\mathbf{r},t)$.
Antwoord: (a) $\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{grad}\,f=0$; (b) $\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{grad}\,f=0$; (c) $\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{H}_0=0$; (d) $\varepsilon_0\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0=\mu_0\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0$; (e) $-(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0)\partial_t f=\varepsilon_0^{-1}(\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0)\,\mathbf{grad}\,f=\mu_0^{-1}(\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0)\,\mathbf{grad}\,f$; (f) $c_0^{-2}(\partial_t f)^2=(\mathbf{grad}\,f)\cdot(\mathbf{grad}\,f)$.

Vraagstuk 7.3. Bewijs, uitgaande van de Vergelijkingen (7.1), (7.2), (7.6) en (7.7), dat in vacuüm $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ aan de vergelijking $\nabla^2\mathbf{E}-c_0^{-2}\partial_t^2\mathbf{E}=\mathbf{0}$ en $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ aan de vergelijking $\nabla^2\mathbf{H}-c_0^{-2}\partial_t^2\mathbf{H}=\mathbf{0}$ voldoet. (Aanwijzing: maak gebruik van de vectoridentiteit $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}=\mathbf{grad}\,\mathrm{div}-\nabla^2$, met $\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$.) Schrijf de verkregen vectoriële golfvergelijkingen uit in hun kentallen.
Antwoord: $\nabla^2E_x-c_0^{-2}\partial_t^2E_x=0$, $\nabla^2E_y-c_0^{-2}\partial_t^2E_y=0$, $\nabla^2E_z-c_0^{-2}\partial_t^2E_z=0$ en analoge vergelijkingen voor H_x, H_y en H_z.

8. De elektromagnetische veldvergelijkingen bij aanwezigheid van geladen deeltjes

Uit ervaring is bekend, dat de aanwezigheid van elektrisch geladen deeltjes gepaard gaat met de aanwezigheid van een elektromagnetisch veld. Wanneer wij de eigenschappen van het elektromagnetische veld bestuderen in een deel van de ruimte waar vacuüm is (dus buiten het deel van de ruimte waar de geladen deeltjes aanwezig zijn), dan vinden wij wederom de in Par. 7 behandelde elektromagnetische veldvergelijkingen in vacuüm terug. Het onderzoeken van de eigenschappen van het elektromagnetische veld in een gebied waar zich geladen deeltjes – al of niet bewegend – bevinden, dient met behoedzaamheid te geschieden, omdat in zo'n gebied de elektromagnetische veldsterkten niet direct voor meting toegankelijk zijn. (Wederom wordt opgemerkt, dat de in Par. 5 beschreven definitiemeting van **E** en **H** alleen in vacuüm kan worden uitgevoerd.) Hoe wij in het onderhavige geval te werk gaan, wordt hieronder weergegeven.

In de eerste plaats beschouwen wij een configuratie waarop de stelling van GAUSS (Fig. 11) toepasselijk is. Hierbij kiezen wij $\mathscr{S}$ zodanig, dat $\mathscr{S}$ geheel in vacuüm is gelegen, doch tevens zo, dat zich binnen $\mathscr{S}$ geladen deeltjes bevinden. Op $\mathscr{S}$ kunnen wij dan volgens de in Par. 5 beschreven methode o.a. **E** meten en het experiment wijst uit, dat

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}A = Q/\varepsilon_0, \tag{8.1}$$

waarin Q de totale hoeveelheid binnen $\mathscr{S}$ aanwezige elektrische lading is en ε_0 de permittiviteit van het vacuüm voorstelt. Indien de binnen $\mathscr{S}$ aanwezige lading een ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ heeft, kunnen wij in het rechterlid van (8.1) substitueren (zie (2.22))

$$Q = \iiint_{\mathscr{V}} \rho\,\mathrm{d}V. \tag{8.2}$$

In de onderstelling, dat **E** onder deze omstandigheden in $\mathscr{V}$ continu differentieerbaar is, kunnen wij op het linkerlid van (8.1) de stelling van

GAUSS (7.14) toepassen. Het resultaat is

$$\iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = \varepsilon_0^{-1} \iiint_{\mathscr{V}} \rho\,\mathrm{d}V. \tag{8.3}$$

Wij komen niet in tegenspraak met de experimenten, indien wij (8.3) geldig verklaren voor ieder gebied $\mathscr{V}$ waar zich geladen deeltjes met een continue ladingsdichtheid bevinden. Derhalve geldt dan

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0. \tag{8.4}$$

Opgemerkt wordt, dat (8.4) tot (7.6) reduceert in een gebied waar $\rho = 0$.

Op dezelfde manier kunnen wij **H** op $\mathscr{S}$ meten; het experiment wijst dan uit, dat

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}A = 0. \tag{8.5}$$

In de onderstelling, dat ook **H** in de ladingsverdeling die binnen $\mathscr{S}$ aanwezig is, continu differentieerbaar is, geeft toepassing van de stelling van GAUSS (7.15) op het linkerlid van (8.5) het resultaat

$$\iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\mathbf{H}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{8.6}$$

Wij komen wederom niet in tegenspraak met de experimenten, indien wij (8.6) geldig verklaren in ieder gebied $\mathscr{V}$ waar zich geladen deeltjes met een continue ladingsdichtheid bevinden. Derhalve geldt dan

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{8.7}$$

Opgemerkt wordt, dat (8.7) met (7.7) in overeenstemming is in een gebied waar $\rho = 0$.

In de tweede plaats beschouwen wij een configuratie waarop de stelling van STOKES (Fig. 10) toepasselijk is. Verder werken wij in een gebied waar een *stationaire stroming van elektrisch geladen deeltjes* aanwezig is. Wij kiezen $\mathscr{C}$ zodanig, dat $\mathscr{C}$ geheel in vacuüm is gelegen en $\mathscr{S}$ zodanig, dat door $\mathscr{S}$ heen geladen deeltjes (stationair) stromen. Langs $\mathscr{C}$ kunnen wij dan volgens de in Par. 5 beschreven methode o.a. **H** meten, terwijl wij op $\mathscr{S}$ volgens de in Par. 2 beschreven methode **J** kunnen bepalen. Het experiment wijst dan uit, dat

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s = I, \tag{8.8}$$

waarin I de totale hoeveelheid lading is die per eenheid van tijd het oppervlak $\mathscr{S}$ passeert in de richting die rechts-cyclisch aan $\boldsymbol{\tau}$ is toe-

gevoegd; I noemt men ook wel de door $\mathscr{C}$ omvatte elektrische stroom. Indien de stroming van elektrisch geladen deeltjes een elektrische stroomdichtheid $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ heeft, kunnen wij in het rechterlid van (8.8) substitueren

$$I = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, dA. \tag{8.9}$$

In de onderstelling, dat $\mathbf{H}$ onder deze omstandigheden op $\mathscr{S}$ continu differentieerbaar is, kunnen wij op het linkerlid van (8.8) de stelling van STOKES (7.10) toepassen. Het resultaat is

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \, dA = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \, dA. \tag{8.10}$$

Wij komen niet in tegenspraak met de experimenten, indien wij (8.10) geldig verklaren voor ieder oppervlak $\mathscr{S}$ waardoorheen elektrisch geladen deeltjes met een continue stroomdichtheid stationair stromen. Daar echter $\mathscr{S}$ willekeurig is, verkrijgen wij voor ieder gebied waarin stationair stromende elektrisch geladen deeltjes aanwezig zijn,

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{8.11}$$

Opgemerkt wordt, dat (8.8) en (8.9) in overeenstemming zijn met (2.35) en dat (8.11) in overeenstemming is met (2.36). Verder zijn in een gebied waar $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, (8.11) en (7.1) met elkaar in overeenstemming.

Op dezelfde manier kunnen wij $\mathbf{E}$ op $\mathscr{C}$ meten; het experiment wijst dan uit, dat

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} \, ds = 0. \tag{8.12}$$

In de onderstelling, dat ook $\mathbf{E}$ in de stationaire stroming van elektrisch geladen deeltjes continu differentieerbaar is, geeft toepassing van de stelling van STOKES (7.11) op het linkerlid van (8.12) het resultaat

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{E} \, dA = 0. \tag{8.13}$$

Wij komen niet in tegenspraak met de experimenten, indien wij (8.13) geldig verklaren voor ieder oppervlak $\mathscr{S}$ waardoorheen elektrisch geladen deeltjes stationair stromen. Daar echter $\mathscr{S}$ willekeurig is, verkrijgen wij voor ieder gebied waarin stationair stromende elektrisch geladen deeltjes aanwezig zijn,

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{8.14}$$

Opgemerkt wordt, dat (8.14) in overeenstemming is met (7.2).

Teneinde tot een volledig stelsel vergelijkingen te geraken bij aanwezigheid van *niet-stationair stromende elektrisch geladen deeltjes*, doen wij een beroep op de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom (2.30). Rekening houdend met (8.4) kunnen wij stellen

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \tag{8.15}$$

Daar $\mathbf{J}$ ook in (8.11) voorkomt, ligt het voor de hand om (8.11) uit te breiden tot

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}. \tag{8.16}$$

Deze vergelijking is enerzijds in overeenstemming met (7.1) in een gebied waar $\rho = 0$ en $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ (vacuüm) en anderzijds met (8.11) voor het geval van stationaire velden ($\partial_t \mathbf{E} = \mathbf{0}$). Bovendien zijn (8.4) en (8.16) tezamen in overeenstemming met de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom (2.30). De hier gevolgde redenering is in wezen van J. C. MAXWELL afkomstig en vormt een van de meest fundamentele overwegingen in de theorie van het elektromagnetische veld.

Wat de overige vergelijkingen betreft, doen wij eerst een beroep op (8.7) en (7.7). Wij blijven met beide vergelijkingen in overeenstemming, indien wij ook in het algemene geval van niet-stationaire stroming van elektrisch geladen deeltjes stellen

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{8.17}$$

Vervolgens doen wij een beroep op (8.14) en (7.2) en stellen

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}. \tag{8.18}$$

Deze vergelijking is enerzijds in overeenstemming met (7.2) in een gebied waar $\rho = 0$ en $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ (vacuüm) en anderzijds met (8.14) voor het geval van stationaire velden ($\partial_t \mathbf{H} = \mathbf{0}$). Bovendien zijn (8.17) en (8.18) in overeenstemming met elkaar.

De met (8.4), (8.16), (8.17) en (8.18) overeenkomende vergelijkingen zonder afgeleiden naar de plaatscoördinaten zijn

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}A = \varepsilon_0^{-1} \iiint_{\mathscr{V}} \rho\, \mathrm{d}V, \tag{8.19}$$

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{H}\, \mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}\, \mathrm{d}A + \varepsilon_0 \partial_t \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}\, \mathrm{d}A, \tag{8.20}$$

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}\, \mathrm{d}A = 0, \tag{8.21}$$

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}s = -\mu_0\partial_t \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}A. \tag{8.22}$$

Voor wat de aan (8.19) t/m (8.22) ten grondslag liggende configuraties betreft, verwijzen wij naar Fig. 10 en Fig. 11.

Het is – althans op macroscopische schaal – niet gelukt met behulp van een deeltjesstroom (8.21) en (8.22) een structuur te geven die met respectievelijk (8.19) en (8.20) overeenkomt. Men drukt dit ervaringsfeit uit door te zeggen, dat er op macroscopische schaal geen „magnetische ladingen" bestaan.

De uiteindelijke controle of de thans verkregen vergelijkingen correct zijn, dient te geschieden door het verifiëren (langs experimentele weg) van de *oplossingen* van deze vergelijkingen in een vacuümgebied (waar **E** en **H** kunnen worden gemeten). Het oplossen van (8.4), (8.16), (8.17) en (8.18) bij gegeven $\rho = \rho(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ – waarbij ρ en **J** aan de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom (2.30) moeten voldoen – is een wiskundig vraagstuk dat in zijn algemeenheid wegens zijn gecompliceerdheid buiten het bestek van een inleidende beschouwing valt. Wel wordt opgemerkt, dat bij gegeven ρ en **J** het aantal vergelijkingen even groot is als het aantal onbekende grootheden, hetgeen een vereiste is voor een goed gesteld probleem. Om deze telling uit te voeren, is het handig om **J** als gegeven te beschouwen en de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom (2.30), alsmede de vergelijkingen (8.4) en (8.17) als hulpvergelijkingen te beschouwen; zodoende komt men op (8.16) en (8.18) als zijnde de fundamentele partiële differentiaalvergelijkingen, met **E** en **H** als onbekende grootheden (d.i. zes scalaire vergelijkingen met zes scalaire onbekende grootheden in ieder gegeven coördinatenstelsel).

Tot slot van deze paragraaf komen wij nog even terug op de in Par. 4 aangestipte klassieke elektronentheorie van LORENTZ. Hierin wordt uitgegaan van de onderstelling dat de vergelijkingen (8.19) t/m (8.22) ook op microscopische schaal geldig zijn. Vervolgens wordt aan de hand van een bepaald model van de elementaire bouwstenen van de materie de term **J** in (8.20) gesplitst in een aantal bijdragen waarin achtereenvolgens transport van geladen deeltjes „over grote afstanden" (geleidingsstroom), lineaire beweging van geladen deeltjes om een evenwichtsstand (polarisatiestroom) en beweging van geladen deeltjes in een gesloten baan (magnetisatiestroom) worden onderscheiden.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 8.1. Laat zien, dat de Vergelijkingen (8.4) en (8.16) in overeenstemming zijn met de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom (Vergelijking (2.30)).

Vraagstuk 8.2. Laat zien, dat de Vergelijkingen (8.19) en (8.20) in overeenstemming zijn met de wet van behoud van elektrische lading (Vergelijking (2.29)).

Vraagstuk 8.3. Het elektrische veld van een statische elektrische lading Q die uniform over het gebied binnen een bol met straal a en middelpunt $\mathcal{O}$ is verdeeld, vertoont bolsymmetrie t.o.v. $\mathcal{O}$. Bereken (a) de ladingsdichtheid ρ en (b) met behulp van Vergelijking (8.19) de elektrische veldsterkte $\mathbf{E}$ van de ladingsverdeling. Bewijs, dat het antwoord aan $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ en aan $\mathbf{rot}\,\mathbf{E}=\mathbf{0}$ voldoet.
Antwoord: (a) $\rho=3Q/4\pi a^3$ voor $0\leq r<a$ en $\rho=0$ voor $a<r<\infty$; (b) $\mathbf{E}=Q\mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0 a^3$ voor $0\leq r\leq a$ en $\mathbf{E}=Q\mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0 r^3$ voor $a\leq r<\infty$, waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector van $\mathcal{O}$ naar het punt van waarneming voorstelt.

Vraagstuk 8.4. Bereken, uitgaande van Vraagstuk 8.3, de elektrische veldsterkte van een puntlading ter sterkte q.
Antwoord: $\mathbf{E}=q\mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0 r^3$ voor $0<r<\infty$.

Vraagstuk 8.5. Bereken de kracht $\mathbf{F}$ die een stilstaande puntlading q_2 ondervindt van een stilstaande puntlading q_1, indien $\mathbf{r}$ de vectoriële afstand van de puntlading q_1 naar de puntlading q_2 voorstelt.
Antwoord: $\mathbf{F}=q_1q_2\mathbf{r}/4\pi\varepsilon_0 r^3$ (wet van COULOMB).

Vraagstuk 8.6. In het gebied binnen een rechte cirkelcilinder met straal a loopt, uniform over de dwarsdoorsnede verdeeld, een stationaire stroom I van geladen deeltjes. Het magnetische veld van deze stroomverdeling vertoont rotatiesymmetrie om de as van de cilinder. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in, zodanig dat de stroomverdeling aanwezig is in het gebied $0\leq x^2+y^2<a^2$, $-\infty<z<\infty$. Bepaal (a) de stroomdichtheid en (b) met behulp van Vergelijking (8.8) de magnetische veldsterkte. Bewijs, dat het antwoord aan $\mathbf{rot}\,\mathbf{H}=\mathbf{J}$ en aan $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ voldoet.
Antwoord: (a) $\mathbf{J}=(I/\pi a^2)\mathbf{i}_z$ voor $0\leq r<a$ en $\mathbf{J}=\mathbf{0}$ voor $a<r<\infty$; (b) $\mathbf{H}=(I/2\pi a^2)\times(\mathbf{i}_z\times\mathbf{r})$ voor $0\leq r\leq a$ en $\mathbf{H}=(I/2\pi r^2)(\mathbf{i}_z\times\mathbf{r})$ voor $a\leq r<\infty$. Hierin is $\mathbf{r}=x\mathbf{i}_x+y\mathbf{i}_y$ en derhalve $\mathbf{i}_z\times\mathbf{r}=-y\mathbf{i}_x+x\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 8.7. Bereken, uitgaande van Vraagstuk 8.6, de magnetische veldsterkte van een stationaire stroom I die in een oneindig lange, oneindig dunne elektrisch geleidende draad loopt. (Kies de z-as van een Cartesiaans coördinatenstelsel langs de draad en laat I de stroom in de positieve z-richting zijn.)
Antwoord: $\mathbf{H}=(I/2\pi r^2)(\mathbf{i}_z\times\mathbf{r})$ voor $0<r<\infty$, waarin $\mathbf{r}=x\mathbf{i}_x+y\mathbf{i}_y$ en derhalve $\mathbf{i}_z\times\mathbf{r}=-y\mathbf{i}_x+x\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 8.8. In een configuratie bestaande uit twee onderling evenwijdige, oneindig lange, oneindig dunne, elektrisch geleidende, rechte draden wordt Geleider 1 doorlopen door een stationaire elektrische stroom I_1 en Geleider 2 door een stationaire elektrische stroom I_2. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat Geleider 1 samenvalt met $x=a_1$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$ en Geleider 2 met $x=a_2$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$,

waarin $a_1 < a_2$; I_1 en I_2 worden positief geteld in de positieve z-richting. Bepaal (a) de kracht $\mathbf{F}^{(1)}_{1\to 2}$ die Geleider 2 per eenheid van lengte ondervindt van het magnetische veld van Geleider 1 en (b) de kracht $\mathbf{F}^{(1)}_{2\to 1}$ die Geleider 1 per eenheid van lengte ondervindt van het magnetische veld van Geleider 2.
Antwoord: (a) $\mathbf{F}^{(1)}_{1\to 2} = -(\mu_0 I_1 I_2/2\pi d)\mathbf{i}_x$; (b) $\mathbf{F}^{(1)}_{2\to 1} = (\mu_0 I_1 I_2/2\pi d)\mathbf{i}_x$ waarin $d = a_2 - a_1$.

Vraagstuk 8.9. In een oneindig lange, rechte cirkelcilinder met straal a bevindt zich, uniform over de dwarsdoorsnede verdeeld, een hoeveelheid elektrische lading $Q^{(1)}$ per eenheid van lengte in de axiale richting; de ladingsverdeling is statisch. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat het gebied binnen de cirkelcilinder samenvalt met $0 \leq x^2 + y^2 < a^2$, $-\infty < z < \infty$. Bepaal (a) de ruimtelijke ladingsdichtheid en (b) met behulp van Vergelijking (8.19) de elektrische veldsterkte van de ladingsverdeling. Breng hierbij in rekening, dat de configuratie rotatiesymmetrie vertoont om de z-as. Bewijs, dat het antwoord aan $\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ en aan $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ voldoet.
Antwoord: (a) $\rho = Q^{(1)}/\pi a^2$ voor $0 \leq r < a$, $\rho = 0$ voor $a < r < \infty$; (b) $\mathbf{E} = Q^{(1)}\mathbf{r}/2\pi\varepsilon_0 a^2$ voor $0 \leq r \leq a$, $\mathbf{E} = Q^{(1)}\mathbf{r}/2\pi\varepsilon_0 r^2$ voor $a \leq r < \infty$, waarin $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 8.10. Bereken, uitgaande van Vraagstuk 8.9, de elektrische veldsterkte van een oneindig lange, oneindig dunne, geladen lijn, die een hoeveelheid lading $Q^{(1)}$ per eenheid van lengte bevat.
Antwoord: $\mathbf{E} = Q^{(1)}\mathbf{r}/2\pi\varepsilon_0 r^2$ voor $0 < r < \infty$, waarin $\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 8.11. Op een oneindig uitgebreide, oneindig dunne, vlakke plaat is een hoeveelheid elektrische lading σ per eenheid van oppervlakte aanwezig. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat de plaat samenvalt met $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z = 0$. Bepaal met behulp van Vergelijking (8.19) de elektrische veldsterkte van de ladingsverdeling; deze heeft alleen een component in de z-richting. Bewijs, dat het antwoord voor $z \neq 0$ aan $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ en aan $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$ voldoet.
Antwoord: $\mathbf{E} = -(\sigma/2\varepsilon_0)\mathbf{i}_z$ voor $-\infty < z < 0$, $\mathbf{E} = (\sigma/2\varepsilon_0)\mathbf{i}_z$ voor $0 < z < \infty$.

Vraagstuk 8.12. In een configuratie bestaande uit twee onderling evenwijdige, oneindig uitgebreide, oneindig dunne, vlakke platen bevindt zich op Plaat 1 een hoeveelheid elektrische lading σ_1 per eenheid van oppervlakte en op Plaat 2 een hoeveelheid elektrische lading σ_2 per eenheid van oppervlakte. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat Plaat 1 samenvalt met $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z = d_1$ en Plaat 2 met $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z = d_2$, waarin $d_1 < d_2$. Bepaal (a) de kracht $\mathbf{F}^{(1)}_{1\to 2}$ die Plaat 2 per eenheid van oppervlakte ondervindt van het elektrische veld van Plaat 1 en (b) de kracht $\mathbf{F}^{(1)}_{2\to 1}$ die Plaat 1 per eenheid van oppervlakte ondervindt van het elektrische veld van Plaat 2.
Antwoord: (a) $\mathbf{F}^{(1)}_{1\to 2} = (\sigma_1\sigma_2/2\varepsilon_0)\mathbf{i}_z$; (b) $\mathbf{F}^{(1)}_{2\to 1} = -(\sigma_1\sigma_2/2\varepsilon_0)\mathbf{i}_z$.

Vraagstuk 8.13. Een oneindig uitgebreide, oneindig dunne, vlakke bundel elektronen beweegt met constante snelheid in een vaste richting. De stroomsterkte per eenheid van breedte van de bundel bedraagt $I^{(1)}$. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat het vlak van de bundel samenvalt met het vlak $x = 0$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ en de elektronen zich in de *negatieve* z-richting bewegen. Bepaal met behulp van Vergelijking (8.8) de magnetische veldsterkte van de bundel; deze heeft alleen een component in de y-richting. Bewijs, dat het antwoord voor $x \neq 0$ aan $\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{0}$ en aan $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ voldoet.
Antwoord: $\mathbf{H} = -\frac{1}{2}I^{(1)}\mathbf{i}_y$ voor $-\infty < x < 0$, $\mathbf{H} = \frac{1}{2}I^{(1)}\mathbf{i}_y$ voor $0 < x < \infty$.

Vraagstuk 8.14. In een configuratie bestaande uit twee onderling evenwijdige, oneindig uitgebreide, oneindig dunne, elektrisch geleidende, vlakke platen wordt Plaat 1 doorlopen door een stationaire elektrische stroom ter sterkte $I_1^{(1)}$ per eenheid van breedte en Plaat 2 door een daaraan evenwijdige stationaire stroom ter sterkte $I_2^{(1)}$ per eenheid van breedte. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat Plaat 1 samenvalt met $x = a_1$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$ en Plaat 2 met $x = a_2$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, waarin $a_1 < a_2$, terwijl beide stromen in de z-richting lopen. Bepaal (a) de magnetische veldsterkte van deze stroomverdeling, (b) de kracht $\mathbf{F}_{1\to 2}^{(1)}$ die Plaat 2 per eenheid van oppervlakte ondervindt van het magnetische veld van Plaat 1, (c) de kracht $\mathbf{F}_{2\to 1}^{(1)}$ die Plaat 1 per eenheid van oppervlakte ondervindt van het magnetische veld van Plaat 2.
Antwoord: (a) $\mathbf{H} = -\frac{1}{2}(I_1^{(1)}+I_2^{(1)})\mathbf{i}_y$ voor $-\infty < x < a_1$, $\mathbf{H} = \frac{1}{2}(I_1^{(1)}-I_2^{(1)})\mathbf{i}_y$ voor $a_1 < x < a_2$, $\mathbf{H} = \frac{1}{2}(I_1^{(1)}+I_2^{(1)})\mathbf{i}_y$ voor $a_2 < x < \infty$, (b) $\mathbf{F}_{1\to 2}^{(1)} = -\frac{1}{2}\mu_0 I_1^{(1)} I_2^{(1)}\mathbf{i}_x$; (c) $\mathbf{F}_{2\to 1}^{(1)} = \frac{1}{2}\mu_0 I_1^{(1)} I_2^{(1)}\mathbf{i}_x$.

Vraagstuk 8.15. Voor het elektrische veld van een statische ladingsverdeling kan op grond van Vergelijking (8.12) een elektrische scalaire potentiaal $V = V(\mathbf{r})$ worden ingevoerd zodanig, dat $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V$. Leid de differentiaalvergelijking af waaraan $V = V(\mathbf{r})$ moet voldoen.
Antwoord: $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ of $\partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \partial_z^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ (vergelijking van POISSON). (Opmerking: in een gebied waar $\rho = 0$ gaat de vergelijking van POISSON over in de vergelijking van LAPLACE: $\nabla^2 V = 0$ of $\partial_x^2 V + \partial_y^2 V + \partial_z^2 V = 0$.)

Vraagstuk 8.16. Voor het magnetische veld van een stationaire stroomverdeling geldt o.a. Vergelijking (8.7). Aan deze vergelijking is te voldoen door te stellen $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A}$, waarin $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ de magnetische vectorpotentiaal wordt genoemd. Leid de differentiaalvergelijking af waaraan $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ moet voldoen, indien wij verder stellen $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$. (Aanwijzing: maak gebruik van de vectoridentiteit $\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$.)
Antwoord: $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$ of, uitgeschreven in de Cartesiaanse kentallen, $\partial_x^2 A_x + \partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_x = -\mu_0 J_x$, $\partial_x^2 A_y + \partial_y^2 A_y + \partial_z^2 A_y = -\mu_0 J_y$, $\partial_x^2 A_z + \partial_y^2 A_z + \partial_z^2 A_z = -\mu_0 J_z$. (Merk op, dat de oplossingen van de differentiaalvergelijking aan $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$ kunnen voldoen, omdat $\mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0$ voor een stationaire stroming.)

Vraagstuk 8.17. Leid uit de Vergelijkingen (8.16), (8.4), (8.17) en (8.18) een (stelsel) vergelijking(en) af waaruit (a) $\mathbf{H}$ geëlimineerd is, (b) $\mathbf{E}$ geëlimineerd is.
Antwoord: (a) $\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{E} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\mathbf{E} = -\mu_0\partial_t\mathbf{J}$ of $\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\mathbf{E} = \mu_0\partial_t\mathbf{J} + \varepsilon_0^{-1}\,\mathbf{grad}\,\rho$ met $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$; (b) $\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{H} + \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\mathbf{H} = \mathbf{rot}\,\mathbf{J}$ of $\nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\mathbf{H} = -\mathbf{rot}\,\mathbf{J}$ met $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$. (Merk op, dat in een gebied waar $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ en $\rho = 0$ deze vergelijkingen overgaan in de vergelijkingen die in Vraagstuk 7.3 zijn gegeven.)

9. De elektromagnetische veldvergelijkingen in een materieel medium

Om de elektromagnetische veldvergelijkingen in een materieel medium op te stellen, gaan wij op overeenkomstige wijze te werk als in Par. 8. Beschouw een brok materie die een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte inneemt; buiten $\mathscr{V}$ is er vacuüm of zijn eventueel geladen deeltjes aanwezig. In het vacuümgebied buiten $\mathscr{V}$ zijn de elektromagnetische veldvectoren $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ voor directe meting toegankelijk (zie Par. 5) en vinden wij wederom de elektromagnetische veldvergelijkingen in vacuüm (zie Par. 7). In een gebied buiten $\mathscr{V}$ waar zich geladen deeltjes bevinden, verklaren wij de in Par. 8 opgestelde vergelijkingen geldig. In $\mathscr{V}$ zijn de elektromagnetische veldvectoren niet direct voor meting toegankelijk; als gevolg hiervan is de definitie van de elektromagnetische veldvectoren tot in $\mathscr{V}$ slechts op axiomatische wijze uit te breiden. Hierbij dienen wij er vanzelfsprekend voor te zorgen, dat noch wiskundige, noch natuurkundige tegenstrijdigheden ontstaan. Het ligt voor de hand om te trachten het vectoriële karakter van de elektromagnetische veldgrootheden te handhaven en zodoende het invoeren van b.v. tensoren als veldgrootheid te vermijden. Deze overwegingen leiden ertoe bepaalde vectoriële grootheden in te voeren die alleen in een materieel medium van nul verschillen en derhalve in vacuüm tot nul reduceren. Het speciale geval van aanwezigheid van geladen deeltjes dient hierin mede begrepen te zijn; immers ook losse, geladen deeltjes zijn materie. Mede rekening houdend met de omstandigheid dat wij de eerste en de tweede vergelijking van MAXWELL in onze beschouwingen centraal stellen, komen wij tot

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{P}, \tag{9.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H} - \mu_0 \partial_t \mathbf{M}, \tag{9.2}$$

waarin $\mathbf{J}$, $\mathbf{P}$ en $\mathbf{M}$ alleen in materie van nul verschillen en in vacuüm tot nul reduceren. Het opnemen van de operator ∂_t in de termen $\partial_t \mathbf{P}$ en $\partial_t \mathbf{M}$ is geschied om de vergelijkingen ook bruikbaar te doen zijn voor de

beschrijving van elektrostatische of magnetostatische velden in een materieel medium. De „hulpvergelijkingen" schrijven wij als

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}+\mathbf{P}) = \rho, \tag{9.3}$$

$$\operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H}+\mu_0 \mathbf{M}) = 0. \tag{9.4}$$

Uit (9.1) en (9.3) volgt, dat $\mathbf{J}$ en ρ wederom aan de continuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom

$$\operatorname{div} \mathbf{J}+\partial_t \rho = 0 \tag{9.5}$$

voldoen. De in (9.1) t/m (9.4) voorkomende grootheden heten als volgt:

$\mathbf{E}$ = elektrische veldsterkte,
$\mathbf{H}$ = magnetische veldsterkte,
$\mathbf{J}$ = elektrische (convectie)stroomdichtheid,
$\mathbf{P}$ = elektrische polarisatie,
$\mathbf{M}$ = magnetisatie,
ρ = ladingsdichtheid (van de transporteerbare lading).

In de klassieke elektronentheorie van LORENTZ identificeert men de hier ingevoerde $\mathbf{P}$ met de in Par. 4 ingevoerde ruimtelijke dichtheid van elektrisch moment en de hier ingevoerde $\mathbf{M}$ met de in Par. 4 ingevoerde ruimtelijke dichtheid van magnetisch moment. Bij deze identificatie hanteert LORENTZ een bepaald model van de elementaire bouwstenen van het beschouwde materiële medium (zie ook de laatste alinea van Par. 8).

Teneinde schrijfwerk te besparen, voert men behalve de reeds genoemde grootheden in de *elektrische fluxdichtheid*

$$\mathbf{D} \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon_0 \mathbf{E}+\mathbf{P} \tag{9.6}$$

en de *magnetische fluxdichtheid*

$$\mathbf{B} \overset{\text{def}}{=\!=} \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}). \tag{9.7}$$

Hiermee gaan (9.1) t/m (9.4) over in

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J}+\partial_t \mathbf{D}, \tag{9.8}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{9.9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \tag{9.10}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{9.11}$$

Doorgaans noemt men (9.8) de *eerste vergelijking van* MAXWELL in een materieel medium en (9.9) de *tweede vergelijking van* MAXWELL in een materieel medium.

Het is duidelijk, dat met het invoeren van de grootheden $\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{P},\mathbf{M},\rho\}$ of $\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B},\rho\}$ het vraagstuk van het bepalen van het elektromagnetische veld in een materieel medium nog niet is opgelost. Vergeleken met het geval van vacuüm is immers het *aantal te bepalen grootheden wel uitgebreid*, maar het *aantal vergelijkingen niet*, zodat wij in ieder geval nog vergelijkingen te kort komen. Beschouwen wij wederom (9.1) en (9.2) of (9.8) en (9.9) als de fundamentele vergelijkingen en (9.3), (9.4) en (9.5) of (9.10), (9.11) en (9.5) als hulpvergelijkingen, dan constateren wij, dat ons twee vectoriële (= zes scalaire) vergelijkingen ter beschikking staan voor het bepalen van vijf vectoriële (= vijftien scalaire) grootheden. (Opgemerkt wordt, dat in een materieel medium **J** niet als bekende grootheid mag worden beschouwd, daar in een materieel medium ook het transport van geladen deeltjes niet direct waargenomen kan worden.) De nog ontbrekende vijftien – zes = negen vergelijkingen beschrijven de macroscopische elektromagnetische eigenschappen van het beschouwde materiële medium; zij staan bekend als de *elektromagnetische constitutieve vergelijkingen* en worden in Par. 10 besproken.

De uiteindelijke controle of de thans opgestelde vergelijkingen de elektromagnetische verschijnselen op correcte wijze beschrijven, dient te geschieden door het verifiëren – langs experimentele weg – van de *oplossingen van de vergelijkingen* in een vacuümgebied (waar **E** en **H** voor directe meting toegankelijk zijn). De hiermee samenhangende vraagstukken van wiskundige aard zijn in hun algemeenheid zo gecompliceerd, dat zij buiten het bestek van een inleidende beschouwing vallen. Een aantal eenvoudige configuraties (waar ook de gebruikte wiskundige methodes eenvoudig zijn) zullen tijdens de verdere behandeling van de theorie aan de orde komen.

Evenals in Par. 7 en Par. 8 is het met het oog op de verdere ontwikkeling van de theorie gewenst om te beschikken over vergelijkingen die met (9.8) t/m (9.11) en (9.5) gelijkwaardig zijn, doch waarin geen afgeleiden naar de plaatscoördinaten voorkomen. De bedoelde vergelijkingen worden wederom verkregen door toepassing van stellingen uit de vectoranalyse.

In de eerste plaats beschouwen wij een configuratie waarop de stelling van STOKES van toepassing is (Fig. 10). Toepassing van deze stelling (zie (7.10) en (7.11)) op (9.8) en (9.9) leidt tot

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}+\partial_t\mathbf{D})\,\mathrm{d}A, \tag{9.12}$$

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}s = -\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\partial_t\mathbf{B}\,\mathrm{d}A. \tag{9.13}$$

In de tweede plaats beschouwen wij een configuratie waarop de stelling van GAUSS van toepassing is (Fig. 11). Toepassing van deze stelling (zie (7.14) en (7.15)) op (9.10) en (9.11) leidt tot

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \rho\,\mathrm{d}V, \tag{9.14}$$

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}A = 0. \tag{9.15}$$

Verder geeft toepassing van de stelling van GAUSS op (9.5) nog het resultaat

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}A + \iiint_{\mathscr{V}} \partial_t\rho\,\mathrm{d}V = 0, \tag{9.16}$$

hetgeen wederom als de wet van behoud van elektrische (transporteerbare) lading kan worden geïnterpreteerd (zie Par. 2).

Vergelijking (9.13) was al vóór MAXWELL bekend. Invoeren van de *elektromotorische spanning emf* via

$$emf \overset{\text{def}}{=} \oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}s \tag{9.17}$$

en van de *magnetische flux* Φ via

$$\Phi \overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\,\mathrm{d}A \tag{9.18}$$

in (9.13) leidt tot

$$emf = -\partial_t\Phi. \tag{9.19}$$

Deze vergelijking staat bekend als de *inductiewet van* FARADAY.

Tot slot zijn in Tabel 6 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 6. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
convectiestroomdichtheid	**J**	ampère per vierkante meter	A/m^2
elektrische polarisatie	**P**	coulomb per vierkante meter	C/m^2
magnetisatie	**M**	ampère per meter	A/m
elektrische fluxdichtheid	**D**	coulomb per vierkante meter	C/m^2
magnetische fluxdichtheid	**B**	tesla	T

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 9.1. Leid de Vergelijkingen (9.12) t/m (9.16) af uit respectievelijk de Vergelijkingen (9.8) t/m (9.11) en (9.5).

Vraagstuk 9.2. Bewijs, dat de via Vergelijking (9.18) ingevoerde magnetische flux alleen afhankelijk is van de gesloten randkromme $\mathscr{C}$ van het oppervlak $\mathscr{S}$ en niet van het oppervlak $\mathscr{S}$ dat voor het berekenen van de integraal in het rechterlid wordt gebruikt. (Aanwijzing: maak voor het bewijs gebruik van Vergelijking (9.15).)

Vraagstuk 9.3. Bewijs, dat het rechterlid van Vergelijking (9.12) alleen afhankelijk is van de gesloten randkromme $\mathscr{C}$ van het oppervlak $\mathscr{S}$ en niet van het oppervlak $\mathscr{S}$ dat voor het berekenen van de integraal in het rechterlid wordt gebruikt. (Aanwijzing: maak voor het bewijs gebruik van de Vergelijkingen (9.14) en (9.16).)

10. De elektromagnetische constitutieve vergelijkingen

De elektromagnetische constitutieve vergelijkingen beschrijven de macroscopische elektromagnetische eigenschappen van een materieel medium. De vergelijkingen hebben de vorm van óf een aantal betrekkingen tussen de vectoriële grootheden $\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{P},\mathbf{M}\}$ óf een aantal betrekkingen tussen de vectoriële grootheden $\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\}$. Omtrent het aantal betrekkingen is reeds bekend (zie Par. 9), dat dit gelijkwaardig moet zijn met vijftien − zes = negen scalaire vergelijkingen. De gedaante van de constitutieve vergelijkingen valt soms af te leiden uit een model dat wordt opgesteld voor de elementaire bouwstenen van het beschouwde materiële medium; dit is in wezen het programma van zowel de klassieke elektronentheorie van LORENTZ als de quantumtheorie, zij het dat de laatste een ander uitgangspunt als basis heeft. Wegens hun gecompliceerdheid vallen deze methoden buiten ons bestek. Wij stellen ons op het standpunt, dat de constitutieve vergelijkingen langs experimentele weg worden verkregen met behulp van daartoe ingerichte meetopstellingen. (Voor een aantal overwegingen te dezer zake verwijzen wij naar CORNELIUS[9].)

De bedoelde experimenten wijzen uit, dat voor een grote klasse van materialen de volgende eigenschappen gelden:

(a) $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ hangt alleen af van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ (en niet van $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$) en heeft dezelfde richting als $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Verder geldt $\mathbf{J}\to\mathbf{0}$ voor $\mathbf{E}\to\mathbf{0}$, zodat de betrekking tussen $\mathbf{J}$ en $\mathbf{E}$ kan worden geschreven als

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \tag{10.1}$$

waarin

σ = soortelijke geleiding van het materiaal.

9. CORNELIUS, P., *Samenvatting der elektriciteitsleer volgens het Giorgistelsel*, 3e uitg., Amsterdam, Meulenhoff, 1960.

Voor $|\mathbf{E}| \to \infty$ blijkt verzadiging (Eng.: saturation) op te treden, d.w.z.

$$\mathbf{J} \to \mathbf{J}_{sat} \qquad \text{voor } |\mathbf{E}| \to \infty, \tag{10.2}$$

waarin $\mathbf{J}_{sat}$ = verzadigingsstroomdichtheid. Voor een grafische voorstelling van het verband tussen $|\mathbf{J}|$ en $|\mathbf{E}|$ verwijzen wij naar Fig. 12.

(b) $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ hangt alleen af van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ (en niet van $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$) en heeft dezelfde richting als $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Verder geldt $\mathbf{P} \to \mathbf{0}$ voor $\mathbf{E} \to \mathbf{0}$, zodat de betrekking tussen $\mathbf{P}$ en $\mathbf{E}$ kan worden geschreven als

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}\,, \tag{10.3}$$

waarin

χ_e = elektrische susceptibiliteit van het materiaal.

Voor $|\mathbf{E}| \to \infty$ blijkt verzadiging op te treden, d.w.z.

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P}_{sat} \qquad \text{voor } |\mathbf{E}| \to \infty, \tag{10.4}$$

waarin $\mathbf{P}_{sat}$ = elektrische verzadigingspolarisatie. Voor een grafische voorstelling van het verband tussen $|\mathbf{P}|$ en $|\mathbf{E}|$ verwijzen wij naar Fig. 12.

(c) $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ hangt alleen af van $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ (en niet van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$) en heeft dezelfde richting als $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Verder geldt $\mathbf{M} \to \mathbf{0}$ voor $\mathbf{H} \to \mathbf{0}$, zodat de betrekking tussen $\mathbf{M}$ en $\mathbf{H}$ kan worden geschreven als

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \tag{10.5}$$

waarin

χ_m = magnetische susceptibiliteit van het materiaal.

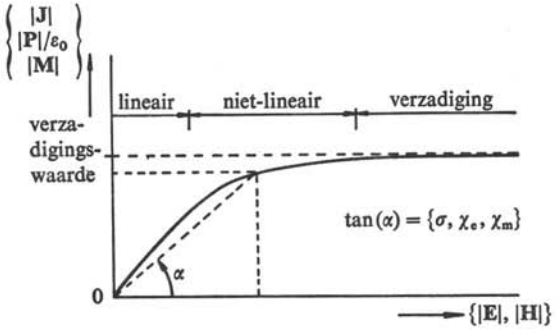


Fig. 12. Verband tussen $|\mathbf{J}|$ *en* $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{P}|$ *en* $|\mathbf{E}|$ *en* $|\mathbf{M}|$ *en* $|\mathbf{H}|$ *voor een isotroop materiaal in het lineaire, het niet-lineaire en het verzadigingsgebied.*

Voor $|\mathbf{H}| \to \infty$ blijkt verzadiging op te treden, d.w.z.

$$\mathbf{M} \to \mathbf{M}_{sat} \qquad \text{voor } |\mathbf{H}| \to \infty, \tag{10.6}$$

waarin $\mathbf{M}_{sat}$ = verzadigingsmagnetisatie. Voor een grafische voorstelling van het verband tussen $|\mathbf{M}|$ en $|\mathbf{H}|$ verwijzen wij naar Fig. 12.

Op grond van (9.6) en (9.7) kan men de constitutieve vergelijkingen ook schrijven in de vorm

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{10.7}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}, \tag{10.8}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \tag{10.9}$$

waarin

σ = soortelijke geleiding,
ε = (absolute) permittiviteit,
ε_r = relatieve permittiviteit,
μ = (absolute) permeabiliteit,
μ_r = relatieve permeabiliteit.

Op grond van (9.6), (10.3) en (10.8) is het verband tussen ε_r en χ_e of tussen ε en χ_e gegeven door

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \qquad \text{of} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e); \tag{10.10}$$

op grond van (9.7), (10.5) en (10.9) is het verband tussen μ_r en χ_m of tussen μ en χ_m gegeven door

$$\mu_r = 1 + \chi_m \qquad \text{of} \qquad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m). \tag{10.11}$$

De hier weergegeven constitutieve vergelijkingen sluiten aan bij de overeenkomstige vergelijkingen voor tijdonafhankelijke velden; voor zulke velden is (10.1) niets anders dan de wet van OHM (voor een geleidend materiaal). Om deze reden wordt **J** ook wel als de geleidingsstroomdichtheid aangeduid en wordt – ook voor tijdafhankelijke velden – (10.1) wel de wet van OHM genoemd.

Omtrent de aard van de materiaaleigenschappen valt het volgende op te merken:

(a) De constitutieve vergelijkingen drukken $\{\mathbf{J},\mathbf{P},\mathbf{M}\}$ of $\{\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\}$ ter plaatse **r** uit in $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$ ter plaatse **r**. Een materiaal dat deze eigenschap vertoont, noemt men *locaal reagerend*; een materiaal dat deze eigenschap niet vertoont, noemt men *niet-locaal reagerend.*

(b) De constitutieve vergelijkingen drukken $\{\mathbf{J},\mathbf{P},\mathbf{M}\}$ of $\{\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\}$ ten tijde t uit in $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$ ten tijde t. Een materiaal dat deze eigenschap

vertoont, noemt men *instantaan* reagerend. Behalve dit, is een veel voorkomend geval, dat $\{\mathbf{J},\mathbf{P},\mathbf{M}\}$ of $\{\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\}$ ten tijde t ook afhangen van $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$ op alle aan t voorafgaande tijdstippen. Het elektromagnetische verleden van het materiaal speelt dan een rol en men zegt, dat het materiaal dan *nawerking* vertoont.

(c) Indien σ, χ_e en χ_m niet van t afhangen, zijn de eigenschappen van het materiaal tijdonafhankelijk en noemt men het materiaal *tijdinvariant*. Indien σ, χ_e en/of χ_m wel van t afhangen, wordt het materiaal *langs parametrische weg beïnvloed* of „gepompt".

(d) Binnen het bereik waar σ, χ_e en χ_m als onafhankelijk van $|\mathbf{E}|$ resp. $|\mathbf{H}|$ kunnen worden beschouwd, gedraagt het materiaal zich *lineair*; buiten dit bereik (zie ook Fig. 12) gedraagt het materiaal zich *niet-lineair*.

(e) De gedaante van de constitutieve vergelijkingen is invariant bij draaiing van het gebruikte coördinatenstelsel. Een materiaal dat deze eigenschap vertoont, noemt men *isotroop*. Indien de in de constitutieve vergelijkingen optredende coëfficiënten afhankelijk zijn van de oriëntatie van het gebruikte coördinatenstelsel, noemt men het materiaal *anisotroop*. In een anisotroop materiaal bestaan voorkeursrichtingen, die b.v. afkomstig kunnen zijn van de geometrische rangschikking van de elementaire bouwstenen (zoals in een kristal het geval is).

(f) De coëfficiënten σ, χ_e en χ_m mogen plaatsafhankelijk zijn. In een gebied waar dit het geval is, noemt men het materiaal *inhomogeen*. In een gebied waar σ, χ_e en χ_m plaatsonafhankelijk zijn, noemt men het materiaal *homogeen*.

Naarmate de eigenschappen van een materiaal ingewikkelder worden, worden ook de constitutieve vergelijkingen ingewikkelder.

In elektronische schakelingen komt het veelvuldig voor, dat materialen in het niet-lineaire deel van hun karakteristiek worden gebruikt. Wel is dan meestal de situatie zo, dat de veldgrootheden relatief kleine variaties in de tijd om een tijdonafhankelijke instelwaarde heen vertonen. In dit geval kan men een locale lineaire benadering van de karakteristiek toepassen (Fig. 13). Voor het geval, dat de beschouwde kleine variaties dezelfde richting als de instelwaarden van de desbetreffende grootheid hebben, heeft de locale lineaire benadering de volgende gedaante

$$\mathbf{J}-\mathbf{J}_0 = \sigma_{\Delta}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0), \tag{10.12}$$

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_0 = \varepsilon_0\chi_{e,\Delta}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0), \tag{10.13}$$

$$\mathbf{M}-\mathbf{M}_0 = \chi_{m,\Delta}(\mathbf{H}-\mathbf{H}_0), \tag{10.14}$$

waarin de index „0" de tijdonafhankelijke instelwaarde aanduidt en

σ_Δ = differentiële soortelijke geleiding,
$\chi_{e,\Delta}$ = differentiële elektrische susceptibiliteit,
$\chi_{m,\Delta}$ = differentiële magnetische susceptibiliteit.

Op grond van de ontwikkeling volgens TAYLOR van de functies $|\mathbf{J}| = J(|\mathbf{E}|)$, $|\mathbf{P}| = P(|\mathbf{E}|)$ en $|\mathbf{M}| = M(|\mathbf{H}|)$ rondom de instelwaarde verkrijgt men

$$\sigma_\Delta = (\partial_{|\mathbf{E}|} J)_0, \tag{10.15}$$

$$\chi_{e,\Delta} = (\partial_{|\mathbf{E}|} P)_0/\varepsilon_0, \tag{10.16}$$

$$\chi_{m,\Delta} = (\partial_{|\mathbf{H}|} M)_0. \tag{10.17}$$

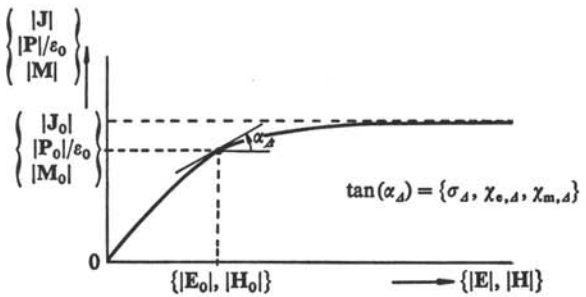


Fig. 13. De differentiële constitutieve coëfficiënten voor een niet-lineair, isotroop materiaal.

Op soortgelijke wijze verkrijgt men

$$\mathbf{D}-\mathbf{D}_0 = \varepsilon_\Delta(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0), \tag{10.18}$$

$$\mathbf{B}-\mathbf{B}_0 = \mu_\Delta(\mathbf{H}-\mathbf{H}_0), \tag{10.19}$$

waarin

ε_Δ = differentiële permittiviteit,
μ_Δ = differentiële permeabiliteit.

Op grond van de ontwikkeling volgens TAYLOR van de functies $|\mathbf{D}| = D(|\mathbf{E}|)$ en $|\mathbf{B}| = B(|\mathbf{H}|)$ rondom de instelwaarde verkrijgt men

$$\varepsilon_\Delta = (\partial_{|\mathbf{E}|} D)_0, \tag{10.20}$$

$$\mu_\Delta = (\partial_{|\mathbf{H}|} B)_0. \tag{10.21}$$

Vervolgens noemen wij de mogelijkheid, dat **J**, **P** en/of **M** een bijdrage bevatten die niet (of nagenoeg niet) door het elektromagnetische veld is te beïnvloeden. Enkele gevallen hiervan worden hieronder genoemd.

(a) In een *halfgeleidend materiaal* levert de *diffusiestroom* een bijdrage $\mathbf{J}_{\text{diff}}$ tot **J** die geen verband houdt met de aanwezigheid van een elektromagnetisch veld, doch veroorzaakt wordt door een gradiënt in de concentratie van ladingdragers (zie Par. 3). Dan geldt

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{drift}} + \mathbf{J}_{\text{diff}}, \tag{10.22}$$

waarin $\mathbf{J}_{\text{drift}}$ = driftstroomdichtheid en $\mathbf{J}_{\text{diff}}$ = diffusiestroomdichtheid. De driftstroomdichtheid is afhankelijk van het elektrische veld; hiervoor geldt

$$\mathbf{J}_{\text{drift}} = \sigma\mathbf{E}, \tag{10.23}$$

waarin σ wederom de soortelijke geleiding wordt genoemd.

(b) In sommige materialen treedt onder bepaalde omstandigheden *permanente elektrische polarisatie* op; deze veld- en tijdonafhankelijke permanente elektrische polarisatie geven wij aan met $\mathbf{P}_{\text{perm}} = \mathbf{P}_{\text{perm}}(\mathbf{r})$. Materialen met een permanente elektrische polarisatie worden gebruikt voor het vervaardigen van *elektreten*.

(c) In sommige materialen treedt onder bepaalde omstandigheden *permanente magnetisatie* op; deze veld- en tijdonafhankelijke permanente magnetisatie geven wij aan met $\mathbf{M}_{\text{perm}} = \mathbf{M}_{\text{perm}}(\mathbf{r})$. Materialen met een permanente magnetisatie worden gebruikt voor het vervaardigen van (permanente) *magneten*.

In de hierboven besproken elektromagnetische constitutieve vergelijkingen is niet in rekening gebracht, dat **J**, **P** en/of **M** kunnen worden beïnvloed door niet-elektromagnetische macroscopische fysische grootheden, zoals temperatuur en/of mechanische vervormingstoestand. Indien deze beïnvloeding optreedt, is er een koppeling van elektromagnetische met niet-elektromagnetische verschijnselen, zoals warmtegeleiding en/of elasticiteit. De invloed van de temperatuur kan doorgaans tot uitdrukking worden gebracht via een afhankelijkheid van σ, χ_e en/of χ_m van de temperatuur. Het verschijnsel, dat **P** wordt beïnvloed door elastische vervorming (en omgekeerd) staat bekend als *piëzo-elektriciteit*. Het verschijnsel, dat **M** wordt beïnvloed door elastische vervorming (en omgekeerd) staat bekend als *magneto-elasticiteit*. Voor een inleidende bespreking van deze verschijnselen verwijzen wij naar KITTEL[10]. Voor

10. KITTEL, C., *Introduction to solid state physics*, 4th. ed., New York, Wiley, 1971.

uitvoeriger beschouwingen over deze onderwerpen verwijzen wij naar AULD[11] en NYE[12]. Een verschijnsel waarvan de ontdekking van betrekkelijk recente datum is, is het *magneto-elektrische effect*. Hierbij wordt **P** behalve door **E** ook door **H** beïnvloed en **M** behalve door **H** ook door **E**. Voor de bespreking van dit verschijnsel verwijzen wij naar O'DELL[13].

Voor de getalwaarden van σ, χ_e, χ_m, ε_r en μ_r voor uiteenlopende materialen verwijzen wij naar de handboeken AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook*[14] en LANDOLT-BÖRNSTEIN[15].

Tot slot zijn in Tabel 7 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 7. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
soortelijke geleiding	σ	siemens per meter	S/m
elektrische susceptibiliteit	χ_e		
magnetische susceptibiliteit	χ_m		
(absolute) permittiviteit	ε	farad per meter	F/m
(absolute) permeabiliteit	μ	henry per meter	H/m
relatieve permittiviteit	ε_r		
relatieve permeabiliteit	μ_r		

11. AULD, B.A., *Acoustic fields and waves in solids*, New York, Wiley-Interscience, 1973, Vol. 1–2.
12. NYE, J.F., *Physical properties of crystals; their representation by tensors and matrices*, Oxford, Clarendon Press, 1957.
13. O'DELL, T.H., *The electrodynamics of magneto-electric media*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.
14. AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook*, 3rd. ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.
15. LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Numerical data and functional relationships in science and technology*, Berlin, Springer-Verlag.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 10.1. Van een materiaal is gegeven, dat $\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \chi_e(\mathbf{r},t,|\mathbf{E}|)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Geef een opsomming van de kenmerken van dit materiaal (zie blz. 69–70).
Antwoord: locaal reagerend, instantaan reagerend, langs parametrische weg beïnvloed, niet-lineair, isotroop, inhomogeen.

Vraagstuk 10.2. Van een materiaal is gegeven, dat in een bepaald gebied $\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \chi_m(|\mathbf{H}|)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Geef een opsomming van de kenmerken van dit materiaal (zie blz. 69–70).
Antwoord: locaal reagerend, instantaan reagerend, tijdinvariant, niet-lineair, isotroop, homogeen.

Vraagstuk 10.3. In een materiaal waarin permanente elektrische halters (dipolen) door een elektrisch veld worden gericht tegen de invloed van de chaotische temperatuurbeweging in, geldt de formule van LANGEVIN: $\mathbf{P} = N|\mathbf{p}|[\coth(|\mathbf{p}||\mathbf{E}|/kT) - kT/|\mathbf{p}||\mathbf{E}|] \times (\mathbf{E}/|\mathbf{E}|)$ waarin N = concentratie van de elektrische halters, $\mathbf{p}$ = elektrisch moment van een halter, k = constante van BOLTZMANN, T = (absolute of thermodynamische) temperatuur. Bepaal (a) de elektrische susceptibiliteit χ_e voor $|\mathbf{p}||\mathbf{E}| \ll kT$, (b) het verband tussen $\mathbf{P}$ en $\mathbf{E}$ voor $|\mathbf{E}| \to \infty$.
Antwoord: (a) $\chi_e = N|\mathbf{p}|^2/3\varepsilon_0 kT$ voor $|\mathbf{p}||\mathbf{E}| \ll kT$; (b) $\mathbf{P} \to N|\mathbf{p}|(\mathbf{E}/|\mathbf{E}|)$ voor $|\mathbf{E}| \to \infty$.

Vraagstuk 10.4. Geef de uitdrukking die in de plaats van Vergelijking (10.8) komt, indien de elektrische polarisatie uitsluitend uit een permanent deel $\mathbf{P}_{\text{perm}}$ bestaat.
Antwoord: $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}_{\text{perm}}(\mathbf{r})$.

Vraagstuk 10.5. Geef de uitdrukking die in de plaats van Vergelijking (10.9) komt, indien de magnetisatie uitsluitend uit een permanent deel $\mathbf{M}_{\text{perm}}$ bestaat.
Antwoord: $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \mu_0 \mathbf{M}_{\text{perm}}(\mathbf{r})$.

Vraagstuk 10.6. Een oneindig uitgebreide plak materiaal van constante dikte is uniform permanent elektrisch gepolariseerd in de richting loodrecht op de grensvlakken. De plak bevindt zich in vacuüm; de permanente elektrische polarisatie bedraagt $\mathbf{P}_{\text{perm}}$. Laat zien, dat de elektromagnetische veldvectoren $\mathbf{E} = -\mathbf{P}_{\text{perm}}/\varepsilon_0$ binnen de plak, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ buiten de plak en $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ overal, aan de (statische) elektromagnetische veldvergelijkingen en aan de randvoorwaarden (zie Par. 11) voldoen.

Vraagstuk 10.7. Een oneindig uitgebreide plak materiaal van constante dikte is uniform permanent gemagnetiseerd in de richting loodrecht op de grensvlakken. De plak bevindt zich in vacuüm; de permanente magnetisatie bedraagt $\mathbf{M}_{\text{perm}}$. Laat zien, dat de elektromagnetische veldvectoren $\mathbf{H} = -\mathbf{M}_{\text{perm}}$ binnen de plak, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ buiten de plak en $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ overal, aan de (statische) elektromagnetische veldvergelijkingen en aan de randvoorwaarden (zie Par. 11) voldoen.

Vraagstuk 10.8. Een oneindig lange cilindrische staaf materiaal is uniform permanent elektrisch gepolariseerd in de richting van de as. De staaf bevindt zich in vacuüm; de permanente elektrische polarisatie bedraagt $\mathbf{P}_{\text{perm}}$. Laat zien, dat de elektromagnetische veldvectoren $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\text{perm}}$ binnen de staaf, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ buiten de staaf en $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ overal, aan de (statische) elektromagnetische veldvergelijkingen en aan de randvoorwaarden (zie Par. 11) voldoen.

Vraagstuk 10.9. Een oneindig lange cilindrische staaf materiaal is uniform permanent gemagnetiseerd in de richting van de as. De staaf bevindt zich in vacuüm; de permanente magnetisatie bedraagt $\mathbf{M}_{\text{perm}}$. Laat zien, dat de elektromagnetische veldvectoren $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{perm}}$ binnen de staaf, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ buiten de staaf en $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ overal, aan de (statische) elektromagnetische veldvergelijkingen en aan de randvoorwaarden (zie Par. 11) voldoen.

11. De randvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee verschillende media

Bij doorgang door het oppervlak waar twee media met van elkaar verschillende elektromagnetische eigenschappen aan elkaar grenzen, veranderen in het algemeen de vectoren **J**, **P** en **M** abrupt van richting en grootte. Als gevolg hiervan kunnen ook abrupte veranderingen in de overige elektromagnetische veldvectoren optreden. Daar op fysische gronden alle elektromagnetische veldvectoren alleen maar eindige waarden kunnen aannemen, laten wij bij abrupte overgangen alleen *eindige sprongen* toe. In een gebied echter waar sprongen in de veldvectoren optreden, zijn deze veldvectoren zeker niet meer differentieerbaar en verliezen de elektromagnetische veldvergelijkingen van het type (9.5) en (9.8) t/m (9.11) hun geldigheid. Nu zullen wij ons bij het afleiden van de betrekkingen die er tussen de limietwaarden van de veldvectoren ter weerszijden van een scheidingsvlak bestaan, beperken tot het geval dat dit scheidingsvlak tijdonafhankelijk is. Het niet meer differentieerbaar zijn van de veldvectoren beperkt zich dan tot het niet meer bestaan van de afgeleiden naar de plaatscoördinaten, daar de configuratie zich niet wijzigt in de loop van de tijd. Met het oog hierop hebben wij in Par. 9 vergelijkingen afgeleid, die voor continu differentieerbare elektromagnetische velden met (9.5) en (9.8) t/m (9.11) gelijkwaardig zijn, doch waarin geen afgeleiden naar de plaatscoördinaten voorkomen; dit zijn de vergelijkingen (9.16) en (9.12) t/m (9.15). Deze laatste vergelijkingen nu worden gebruikt om af te leiden welke betrekkingen er tussen de limietwaarden van de elektromagnetische veldvectoren ter weerszijden van een scheidingsvlak tussen twee verschillende media bestaan; de bedoelde betrekkingen staan bekend als *rand-* of *grensvoorwaarden.*

Daar de randvoorwaarden locale voorwaarden zijn, kunnen wij ons onderzoek beperken tot de onmiddellijke omgeving van het scheidingsvlak; bovendien kunnen wij dit locaal als een plat vlak beschouwen. De limietwaarden van de veldvectoren en van de eigenschappen van het medium aan de ene zijde van het scheidingsvlak duiden wij aan met de index 1, de limietwaarden van de veldvectoren en van de eigenschappen

van het medium aan de andere zijde van het scheidingsvlak duiden wij aan met de index 2. Het scheidingsvlak zelf duiden wij aan met Σ, terwijl de van „Zijde 1" naar „Zijde 2" gerichte eenheidsvector langs de normaal op Σ wordt aangeduid met $\mathbf{v}$. Het punt op Σ waar wij de randvoorwaarden willen afleiden, noemen wij $\mathscr{P}$.

In de eerste plaats passen wij (9.12) toe op een rechthoek $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2 + \mathscr{C}_3 + \mathscr{C}_4$ die is gelegen in een plat vlak loodrecht op Σ en waarvan de zijden $\mathscr{C}_1$ en $\mathscr{C}_3$ (beide ter lengte a) evenwijdig aan Σ zijn en de zijden $\mathscr{C}_2$ en $\mathscr{C}_4$ (beide ter lengte b) evenwijdig aan $\mathbf{v}$; als integratieoppervlak $\mathscr{S}$ kiezen wij het deel van het platte vlak binnen $\mathscr{C}$ (Fig. 14).

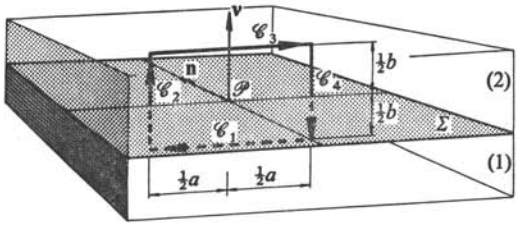


Fig. 14. Randvoorwaarden voor de tangentiële componenten van **E** *en* **H** *aan het scheidingsvlak van twee verschillende media.*

Daar $\mathbf{J}$ en $\partial_t \mathbf{D}$ begrensd zijn, geldt

$$\iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}+\partial_t\mathbf{D})\,\mathrm{d}A \to 0 \qquad \text{voor } b \to 0. \tag{11.1}$$

Verder geldt, daar $\mathbf{H}$ begrensd is,

$$\int_{\mathscr{C}_2} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{en} \qquad \int_{\mathscr{C}_4} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{voor } b \to 0. \tag{11.2}$$

Uit (9.12), (11.1) en (11.2) volgt

$$\int_{\mathscr{C}_1} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathscr{C}_3} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}s \to 0 \qquad \text{voor } b \to 0. \tag{11.3}$$

In het linkerlid van deze betrekking gebruiken wij de uitdrukkingen

$$\boldsymbol{\tau} = -(\mathbf{n}\times\mathbf{v}) \quad \text{langs } \mathscr{C}_1 \qquad \text{en} \qquad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}\times\mathbf{v} \quad \text{langs } \mathscr{C}_3. \tag{11.4}$$

In de limiet $a \to 0$ volgt dan door toepassing van de middelwaardestelling uit de integraalrekening

$$-(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{H}_1 + (\mathbf{n}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{H}_2 = 0 \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{11.5}$$

Deze vergelijking is te herschrijven als

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{v}\times\mathbf{H}_1) = 0 \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{11.6}$$

Daar echter de stand van de rechthoek willekeurig is, moet (11.6) gelden voor iedere eenheidsvector **n** die evenwijdig aan Σ is. Daar bovendien $\mathscr{P}$ een willekeurig punt op Σ voorstelt, volgt tenslotte uit (11.6)

$$\mathbf{v}\times\mathbf{H}_2 = \mathbf{v}\times\mathbf{H}_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{11.7}$$

Op overeenkomstige wijze valt uit (9.13) af te leiden

$$\mathbf{v}\times\mathbf{E}_2 = \mathbf{v}\times\mathbf{E}_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{11.8}$$

De vergelijkingen (11.7) en (11.8) brengen tot uitdrukking, dat de *tangentiële componenten van de elektrische en de magnetische veldsterkte continu* zijn bij doorgang door een scheidingsvlak tussen twee verschillende media.

In de tweede plaats passen wij (9.14) toe op het cirkelcilindrische gebied dat wordt begrensd door het oppervlak $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 + \mathscr{S}_3$, waarvan het grondvlak $\mathscr{S}_1$ en het kopvlak $\mathscr{S}_2$ (beide cirkels met straal a) evenwijdig zijn aan Σ en waarvan het manteloppervlak $\mathscr{S}_3$ (ter hoogte h) evenwijdig is aan **v** (Fig. 15). Teneinde de mogelijkheid open te laten,

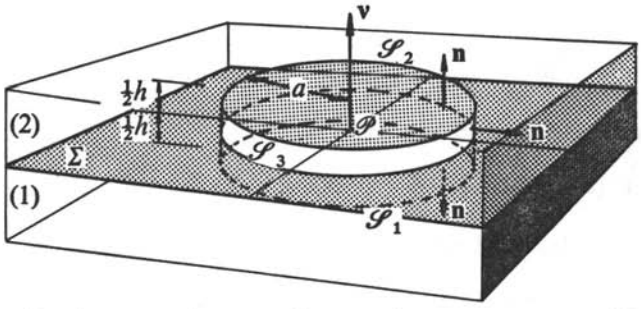


Fig. 15. Randvoorwaarden voor de normale componenten van **D**, **B** *en* **J** *aan het scheidingsvlak van twee verschillende media.*

dat op Σ elektrische oppervlaktelading aanwezig is, schrijven wij

$$(\pi a^2)^{-1} \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\, dA \to \sigma \qquad \text{voor } h \to 0 \quad \text{en} \quad a \to 0; \tag{11.9}$$

hierin is σ de oppervlakteladingsdichtheid in het punt $\mathscr{P}$. Daar **D** begrensd is, geldt

$$\iint_{\mathscr{S}_3} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\, dA \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{11.10}$$

Verder brengen wij in rekening, dat

$$\mathbf{n} = -\mathbf{v} \quad \text{op } \mathscr{S}_1 \qquad \text{en} \qquad \mathbf{n} = \mathbf{v} \quad \text{op } \mathscr{S}_2. \tag{11.11}$$

Uit (11.9), (11.10) en (11.11) volgt

$$(\pi a^2)^{-1} \left[-\iint_{\mathscr{S}_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_1 \, \mathrm{d}A + \iint_{\mathscr{S}_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_2 \, \mathrm{d}A \right] \to \sigma$$

$$\text{voor } h \to 0 \text{ en } a \to 0. \tag{11.12}$$

Toepassen van de middelwaardestelling uit de integraalrekening leidt dan tot

$$-\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_2 = \sigma \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{11.13}$$

Daar echter $\mathscr{P}$ een willekeurig punt op Σ voorstelt, volgt tenslotte uit (11.13)

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_1 = \sigma \quad \text{op } \Sigma. \tag{11.14}$$

Op overeenkomstige wijze valt uit (9.15) af te leiden

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{B}_1 \quad \text{op } \Sigma \tag{11.15}$$

en uit (9.16)

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_2 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_1 = -\partial_t\sigma \quad \text{op } \Sigma. \tag{11.16}$$

De vergelijkingen (11.14) t/m (11.16) geven betrekkingen tussen de normale componenten van een aantal veldvectoren ter weerszijden van een scheidingsvlak. In het bijzonder volgt uit (11.14) t/m (11.16), dat de normale componenten van de elektrische fluxdichtheid, de magnetische fluxdichtheid en de stroomdichtheid continu zijn bij doorgang door een scheidingsvlak tussen twee verschillende media, indien op dat scheidingsvlak geen oppervlaktelading aanwezig is.

Evenals echter (9.14) t/m (9.16) als hulpvergelijkingen bij (9.12) en (9.13) zijn te beschouwen, zijn de randvoorwaarden (11.14) t/m (11.16) te beschouwen als hulpbetrekkingen bij (11.7) en (11.8). Bij de berekeningen zullen wij daarom steeds (11.7) en (11.8) als de fundamentele randvoorwaarden in rekening brengen en (11.14) t/m (11.16) alleen gebruiken om de verkregen resultaten te controleren.

Tot slot bespreken wij nog twee speciale gevallen van randvoorwaarden, nl. de randvoorwaarden op het oppervlak van (a) een elektrisch ondoordringbaar voorwerp en (b) een magnetisch ondoordringbaar voorwerp.

(a) *Elektrisch ondoordringbaar voorwerp*

Een materiaal noemen wij elektrisch ondoordringbaar, indien onafhankelijk van de omstandigheden overal in het materiaal geldt $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Een voorwerp dat uit elektrisch ondoordringbaar materiaal bestaat, noemen wij een elektrisch ondoordringbaar voorwerp. De aanwezigheid van zo'n voorwerp in een elektromagnetisch veld brengen wij in rekening door op het randoppervlak van het voorwerp randvoorwaarden op te leggen aan de tangentiële component van de elektrische veldsterkte. Laat $\mathscr{V}_1$ het ruimtelijke gebied zijn dat door het voorwerp wordt ingenomen. Het randoppervlak van $\mathscr{V}_1$ noemen wij Σ en de eenheidsvector langs de van $\mathscr{V}_1$ af gerichte normaal op Σ noemen wij $\mathbf{v}$ (Fig. 16).

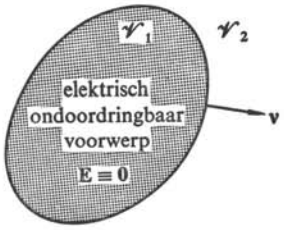


Fig. 16. Randvoorwaarde bij nadering van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp: $\mathbf{v} \times \mathbf{E} \to \mathbf{0}$ *bij nadering van* Σ *via* $\mathscr{V}_2$.

Het gebied aan de zijde van Σ waar $\mathbf{v}$ naar toe wijst, noemen wij $\mathscr{V}_2$. De bedoelde randvoorwaarde is

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E} \to \mathbf{0} \quad \text{bij nadering van } \Sigma \text{ via } \mathscr{V}_2, \tag{11.17}$$

m.a.w. de elektrische veldsterkte is op Σ volgens de normaal gericht. Opgemerkt wordt, dat (11.17) in overeenstemming is met (11.8) en met $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}_1$. Het in dit geval tevens opleggen van randvoorwaarden aan de magnetische veldsterkte zou in wiskundig opzicht tot een overbepaald probleem leiden, hetgeen ontoelaatbaar is. Als gevolg hiervan is in het algemeen niet aan (11.7) voldaan en treedt er bij doorgang door Σ een sprong in $\mathbf{v} \times \mathbf{H}$ op.

Elektrisch ondoordringbare materialen ontstaan als limietgeval uit materialen waarvoor $\sigma \to \infty$ en/of $\varepsilon \to \infty$. Daar ook in dit limietgeval alle veldgrootheden eindig moeten blijven, volgt uit (10.7) en/of (10.8) de voorwaarde $\mathbf{E} \to \mathbf{0}$ in ieder inwendig punt van het materiaal, onafhankelijk van de waarde van **H**, **J**, **D** of **B**.

Opmerking. In het limietgeval dat voor $\sigma \to \infty$ optreedt, noemt men het materiaal ook wel (elektrisch) *volkomen geleidend.* Een aantal metalen voldoen met goede benadering aan deze voorwaarde.

(b) *Magnetisch ondoordringbaar voorwerp*

Een materiaal noemen wij magnetisch ondoordringbaar, indien onafhankelijk van de omstandigheden overal in het materiaal geldt $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Een voorwerp dat uit magnetisch ondoordringbaar materiaal bestaat, noemen wij een magnetisch ondoordringbaar voorwerp. De aanwezigheid van zo'n voorwerp in een elektromagnetisch veld brengen wij in rekening door op het randoppervlak van het voorwerp randvoorwaarden op te leggen aan de tangentiële component van de magnetische veldsterkte. Laat $\mathscr{V}_1$ het ruimtelijke gebied zijn dat door het voorwerp wordt ingenomen. Het randoppervlak van $\mathscr{V}_1$ noemen wij Σ en de eenheidsvector langs de van $\mathscr{V}_1$ af gerichte normaal op Σ noemen wij $\mathbf{v}$ (Fig. 17).

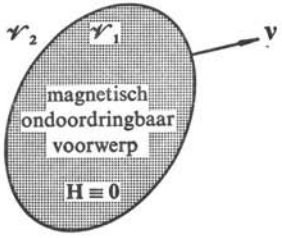


Fig. 17. Randvoorwaarde bij nadering van een magnetisch ondoordringbaar voorwerp: $\mathbf{v} \times \mathbf{H} \to \mathbf{0}$ *bij nadering van* Σ *via* $\mathscr{V}_2$.

Het gebied aan de zijde van Σ waar $\mathbf{v}$ naar toe wijst, noemen wij $\mathscr{V}_2$. De bedoelde randvoorwaarde is

$$\mathbf{v} \times \mathbf{H} \to \mathbf{0} \quad \text{bij nadering van } \Sigma \text{ via } \mathscr{V}_2, \tag{11.18}$$

m.a.w. de magnetische veldsterkte is op Σ volgens de normaal gericht. Opgemerkt wordt, dat (11.18) in overeenstemming is met (11.7) en met $\mathbf{H} \equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}_1$. Het in dit geval tevens opleggen van randvoorwaarden aan de elektrische veldsterkte zou in wiskundig opzicht tot een overbepaald probleem leiden, hetgeen ontoelaatbaar is. Als gevolg hiervan is in het algemeen niet aan (11.8) voldaan en treedt er bij doorgang door Σ een sprong in $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ op.

Magnetisch ondoordringbare materialen ontstaan als limietgeval uit materialen waarvoor $\mu \to \infty$. Daar ook in dit limietgeval alle veldgrootheden eindig moeten blijven, volgt uit (10.9) de voorwaarde $\mathbf{H} \to \mathbf{0}$ in ieder inwendig punt van het materiaal, onafhankelijk van de waarde van **E**, **J**, **D** of **B**.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 11.1. Laat $\mathscr{S}$ een oppervlak zijn en $\mathbf{n}$ de eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$. Schrijf een willekeurig op $\mathscr{S}$ gedefinieerd vectorveld **E** als de som van zijn normale component $\mathbf{E}_{norm}$ en zijn tangentiële component $\mathbf{E}_{tang}$. Bewijs, dat het verkregen antwoord aan de volgende voorwaarden voldoet: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_{norm} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{tang} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{norm} = \mathbf{0}$ en $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_{tang} = 0$.
Antwoord: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{norm} + \mathbf{E}_{tang}$, met $\mathbf{E}_{norm} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathbf{n}$ en $\mathbf{E}_{tang} = \mathbf{E} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})\mathbf{n} = \mathbf{n}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{n}) = (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\times\mathbf{n}$.

Vraagstuk 11.2. Laat Σ het scheidingsvlak van twee verschillende media zijn en $\mathbf{v}$ de eenheidsvector langs de normaal op Σ. Bewijs, dat $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{J}+\partial_t\mathbf{D})_2 = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{J}+\partial_t\mathbf{D})_1$ op Σ.

Vraagstuk 11.3. Laat Σ het scheidingsvlak van twee verschillende media zijn en $\mathbf{v}$ de eenheidsvector langs de normaal op Σ. Bewijs met behulp van de Vergelijkingen (11.7) en (11.8) en de resultaten van Vraagstuk 11.1, dat $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_2) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_1)$ op Σ.

Vraagstuk 11.4. In de ruimte is een rechthoekig blok van elektrisch volkomen geleidend materiaal aanwezig; de afmetingen van het blok bedragen a, b en c. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat het blok het gebied $-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a$, $-\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b$, $-\frac{1}{2}c < z < \frac{1}{2}c$ beslaat. Geef – uitgeschreven in de kentallen – de randvoorwaarden voor de elektrische veldsterkte.
Antwoord: $E_y \to 0$ en $E_z \to 0$ voor $x\uparrow -\frac{1}{2}a$ en $x\downarrow\frac{1}{2}a$, mits $-\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b$ en $-\frac{1}{2}c < z < \frac{1}{2}c$; $E_z \to 0$ en $E_x \to 0$ voor $y\uparrow -\frac{1}{2}b$ en $y\downarrow\frac{1}{2}b$, mits $-\frac{1}{2}c < z < \frac{1}{2}c$ en $-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a$; $E_x \to 0$ en $E_y \to 0$ voor $z\uparrow -\frac{1}{2}c$ en $z\downarrow\frac{1}{2}c$, mits $-\frac{1}{2}a < x < \frac{1}{2}a$ en $-\frac{1}{2}b < y < \frac{1}{2}b$.

Vraagstuk 11.5. In een begrensd gebied $\mathscr{V}_1$ in de ruimte is elektrisch geleidend materiaal aanwezig; hiervoor geldt $\mathbf{J} = \sigma_1\mathbf{E}$. Het randoppervlak van $\mathscr{V}_1$ is $\mathscr{S}$; de naar buiten gerichte eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ is $\mathbf{n}$. In het gebied $\mathscr{V}_2$ buiten $\mathscr{S}$ is vacuüm; hiervoor geldt $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Bewijs, dat voor $\sigma_1 \to \infty$ de randvoorwaarde $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2 = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_1$ op $\mathscr{S}$ overgaat in $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2 \to \mathbf{0}$ bij nadering van $\mathscr{S}$ via $\mathscr{V}_2$ en vergelijk deze randvoorwaarde met Vergelijking (11.17); hierbij wordt ondersteld, dat alle veldvectoren eindige waarden behouden.

Vraagstuk 11.6. In een begrensd gebied $\mathscr{V}_1$ in de ruimte is diëlektrisch materiaal aanwezig; hiervoor geldt $\mathbf{D} = \varepsilon_1\mathbf{E}$. Het randoppervlak van $\mathscr{V}_1$ is $\mathscr{S}$; de naar buiten gerichte eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ is $\mathbf{n}$. In het gebied $\mathscr{V}_2$ buiten $\mathscr{S}$ is vacuüm; hiervoor geldt $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$. Bewijs, dat voor $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \to \infty$ de randvoorwaarde $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2 = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_1$ op $\mathscr{S}$ overgaat in $\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2 \to \mathbf{0}$ bij nadering van $\mathscr{S}$ via $\mathscr{V}_2$ en vergelijk deze randvoorwaarde met Vergelijking (11.17); hierbij wordt ondersteld, dat alle veldvectoren eindige waarden behouden.

Vraagstuk 11.7. In een begrensd gebied $\mathscr{V}_1$ in de ruimte is magnetisch materiaal aanwezig; hiervoor geldt $\mathbf{B} = \mu_1 \mathbf{H}$. Het randoppervlak van $\mathscr{V}_1$ is $\mathscr{S}$; de naar buiten gerichte eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ is $\mathbf{n}$. In het gebied $\mathscr{V}_2$ buiten $\mathscr{S}$ is vacuüm; hiervoor geldt $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Bewijs, dat voor $\mu_1/\mu_0 \to \infty$ de randvoorwaarde $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1$ op $\mathscr{S}$ overgaat in $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \to \mathbf{0}$ bij nadering van $\mathscr{S}$ via $\mathscr{V}_2$ en vergelijk deze randvoorwaarde met Vergelijking (11.18); hierbij wordt ondersteld, dat alle veldvectoren eindige waarden behouden.

Vraagstuk 11.8. Voor een elektrostatisch veld en voor het veld van stationaire elektrische stroming geldt $\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}$. Op grond van deze vergelijking kan men een scalaire potentiaal $V = V(\mathbf{r})$ invoeren zodanig, dat $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V$. Bewijs, dat het oppervlak van een elektrisch volkomen geleidend voorwerp een equipotentiaaloppervlak is. (Aanwijzing: maak gebruik van de uitdrukking $V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = -\int_1^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}\, ds$, onafhankelijk van de gevolgde integratieweg, en merk op, dat $\int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}\, ds = 0$ voor iedere kromme $\mathscr{L}$ die geheel op het beschouwde oppervlak gelegen is.)

12. Uitwisseling van energie in het elektromagnetische veld

Uitgangspunt voor de beschouwingen omtrent de uitwisseling van energie in het elektromagnetische veld vormt de arbeid die het veld op een bewegend, puntvormig geladen deeltje verricht. De kracht die in vacuüm op zo'n deeltje werkt, is volgens (5.1) gegeven door

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}. \tag{12.1}$$

Tijdens de beweging verricht het elektromagnetische veld mechanische arbeid op het deeltje en wel in het tempo

$$(\mathrm{d}_t W)_{\mathrm{mech}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \tag{12.2}$$

daar $\mathbf{v} \cdot (q\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H}) = 0$ (zie ook (6.14)). Met behulp van dit resultaat gaan wij de uitdrukking opstellen voor het tempo waarin het elektromagnetische veld mechanische arbeid verricht op een zwerm bewegende geladen deeltjes waarvoor de convectiestroomdichtheid $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ kan worden ingevoerd (zie Par. 2). Laat $\mathscr{V}$ een begrensd gebied in de ruimte zijn, waarin zich geladen deeltjes bevinden. Laat ΔV de inhoud zijn van een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathscr{V}$ van $\mathscr{V}$ dat een punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat. Noem ΔN het aantal op het tijdstip t in $\Delta\mathscr{V}$ aanwezige deeltjes en laat $\mathscr{V}_{\mathrm{gr}}$ wederom een korrel zijn in het gebied waar de deeltjes aanwezig zijn. De ruimtelijke dichtheid van het tempo waarin het elektromagnetische veld mechanische arbeid op de bewegende geladen deeltjes verricht, wordt dan ingevoerd via

$$(\partial_t w)_{\mathrm{mech}} \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathscr{V} \to \mathscr{V}_{\mathrm{gr}}} (\Delta V)^{-1} \sum_{k=1}^{\Delta N} q_k \, \mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) \cdot \mathbf{v}_k. \tag{12.3}$$

Wij onderstellen nu, dat $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$ is; dan is $\mathbf{E}$ binnen $\mathscr{V}_{\mathrm{gr}}$ constant op van hogere orde kleine grootheden na, d.w.z.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_k, t) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{voor } k = 1, \ldots, \Delta N. \tag{12.4}$$

Met behulp van de definitie (2.19) van $\mathbf{J}$ gaat dan (12.3) over in

$$(\partial_t w)_{\mathrm{mech}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \tag{12.5}$$

Om het rechterlid van deze vergelijking te herleiden, maken wij gebruik van de in Par. 8 verkregen elektromagnetische veldvergelijkingen (8.16) en (8.18), die gelden bij de aanwezigheid van een zwerm geladen deeltjes. Deze vergelijkingen schrijven wij in de vorm

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}-\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}=\mathbf{J}, \tag{12.6}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}+\mu_0\partial_t\mathbf{H}=\mathbf{0}. \tag{12.7}$$

Door (12.6) scalair met $\mathbf{E}$ en (12.7) scalair met $\mathbf{H}$ te vermenigvuldigen en de resulterende vergelijkingen van elkaar af te trekken, wordt verkregen

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}=-\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{E}-\mu_0\mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{H}-\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \tag{12.8}$$

waarin gebruik gemaakt is van de vectoridentiteit (zie (B.20))

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{H}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E}. \tag{12.9}$$

Nu is

$$\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{E}=\partial_t(\tfrac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) \qquad \text{en} \qquad \mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{H}=\partial_t(\tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}), \tag{12.10}$$

zodat (12.8) kan worden herschreven als

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}+\partial_t(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\tfrac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})+\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0. \tag{12.11}$$

Teneinde dit resultaat fysisch te interpreteren, gaan wij (12.11) integreren over een begrensd gebied $\mathscr{V}_1$. Hierbij is het aan te bevelen rekening te houden met de omstandigheid, dat doorlopende uitwisseling van energie via het elektromagnetische veld alleen kan plaatsvinden als het veld niet aan zichzelf wordt overgelaten, doch in stand wordt gehouden via een (andere) bron (Eng.: source) van energie. Veel voorkomende energiebronnen zijn: een elektrische generator (opwekking van energie langs elektromechanische weg) of een brandstofcel (opwekking van energie langs elektrochemische weg). Daar het in het algemeen moeilijk is om het proces van de opwekking van energie adequaat te beschrijven, zullen wij onderstellen dat de opwekking van elektromagnetische energie plaatsvindt binnen een begrensd gesloten oppervlak $\mathscr{S}_{\text{source}}$ en zullen wij het gebied $\mathscr{V}_{\text{source}}$ binnen $\mathscr{S}_{\text{source}}$ van de beschouwing uitsluiten; $\mathscr{V}_{\text{source}}$ wordt wel als *brongebied* aangeduid.

Het begrensde gebied $\mathscr{V}_1$ waarover (12.11) wordt geïntegreerd, wordt nu zodanig gekozen, dat $\mathscr{V}_1$ inwendig wordt begrensd door $\mathscr{S}_{\text{source}}$ en uitwendig door een begrensd gesloten oppervlak $\mathscr{S}$ dat $\mathscr{S}_{\text{source}}$ geheel

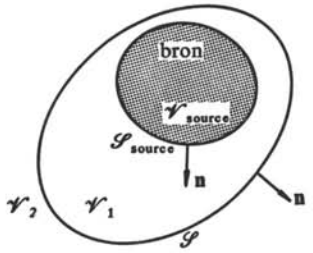


Fig. 18. Uitwisseling van elektromagnetische energie ($\mathscr{V}_{source}$ is een brongebied).

omsluit (Fig. 18); het gebied buiten $\mathscr{S}$ wordt $\mathscr{V}_2$ genoemd. Met gebruikmaking van

$$\iiint_{\mathscr{V}_1} \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV = \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dA - \oiint_{\mathscr{S}_{source}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dA, \tag{12.12}$$

waarin $\mathbf{n}$ is gekozen zoals is aangegeven in Fig. 18, wordt dan verkregen

$$\iiint_{\mathscr{V}_1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,dV + \partial_t \iiint_{\mathscr{V}_1} (\tfrac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\,dV$$

$$+ \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dA = \oiint_{\mathscr{S}_{source}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dA. \tag{12.13}$$

De verschillende termen in deze vergelijking zullen hieronder worden besproken. De term

$$(\partial_t W)_{mech} \overset{def}{=} \iiint_{\mathscr{V}_1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,dV \tag{12.14}$$

stelt het tempo voor waarin het elektromagnetische veld mechanische arbeid verricht op de in $\mathscr{V}_1$ aanwezige bewegende geladen deeltjes; deze arbeid zorgt voor de verandering van de kinetische energie van de deeltjes (zie ook (6.6)). Van de termen

$$W_e \overset{def}{=} \iiint_{\mathscr{V}_1} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,dV \tag{12.15}$$

en

$$W_m \overset{def}{=} \iiint_{\mathscr{V}_1} \tfrac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\,dV \tag{12.16}$$

treedt in (12.13) de verandering per tijdseenheid op. Verder is $W_e \geq 0$, daar $\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \geq 0$ en $W_m \geq 0$, daar $\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} \geq 0$. Op grond hiervan ligt

het voor de hand om W_e te interpreteren als de hoeveelheid energie die in het elektrische veld in $\mathscr{V}_1$ zit opgeslagen en W_m als de hoeveelheid energie die in het magnetische veld in $\mathscr{V}_1$ zit opgeslagen. Daar de term

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A \tag{12.17}$$

een integraal over het oppervlak $\mathscr{S}$ is en het gebied $\mathscr{V}_1$ via $\mathscr{S}$ in contact met zijn omgeving $\mathscr{V}_2$ staat, ligt het voor de hand om P te interpreteren als het momentane vermogen dat het elektromagnetische veld door $\mathscr{S}$ heen van $\mathscr{V}_1$ naar $\mathscr{V}_2$ transporteert. (Let op de richting van $\mathbf{n}$ op $\mathscr{S}$!) Tenslotte kan op soortgelijke wijze

$$P_{\text{source}} \stackrel{\text{def}}{=} \oiint_{\mathscr{S}_{\text{source}}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A \tag{12.18}$$

worden geïnterpreteerd als het momentane vermogen dat de energiebron door $\mathscr{S}_{\text{source}}$ heen aan $\mathscr{V}_1$ toevoert. (Let op de richting van $\mathbf{n}$ op $\mathscr{S}_{\text{source}}$!) Met behulp van (12.14) t/m (12.18) kan (12.13) worden herschreven als

$$(\partial_t W)_{\text{mech}} + \partial_t(W_e + W_m) + P = P_{\text{source}}. \tag{12.19}$$

Deze vergelijking brengt de *wet van behoud van energie* tot uitdrukking: het door de energiebron geleverde vermogen wordt ten dele gebruikt om de kinetische energie van de in $\mathscr{V}_1$ bewegende geladen deeltjes te vergroten, ten dele om de in $\mathscr{V}_1$ aanwezige elektrische en magnetische veldenergie te doen toenemen, terwijl het resterende vermogen als elektromagnetische straling door $\mathscr{S}$ heen uit $\mathscr{V}_1$ wordt afgevoerd. Vergelijking (12.19) staat bekend als de *elektromagnetische vermogensbalans*.

Nu de in (12.13) optredende termen fysisch zijn geïnterpreteerd, kunnen wij naar analogie een interpretatie voor de in (12.11) optredende termen geven. Via (12.3) t/m (12.5) hebben wij reeds ingevoerd de ruimtelijke dichtheid van het tempo waarin het elektromagnetische veld mechanische arbeid op de bewegende geladen deeltjes verricht, nl.

$$(\partial_t w)_{\text{mech}} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}. \tag{12.20}$$

Op grond van (12.15) voeren wij de ruimtelijke dichtheid van elektrische veldenergie

$$w_e \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \tag{12.21}$$

in en op grond van (12.16) de ruimtelijke dichtheid van magnetische veldenergie

$$w_m \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\mu_0\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}. \tag{12.22}$$

Verder voeren wij op grond van (12.17) de oppervlaktedichtheid van de elektromagnetische vermogensstroom

$$\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{12.23}$$

in; de door (12.23) gedefinieerde vector staat bekend als de *vector van* POYNTING. Met behulp van (12.20) t/m (12.23) is (12.11) te herschrijven als

$$(\partial_t w)_{\text{mech}} + \partial_t (w_e + w_m) + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0 \,. \tag{12.24}$$

Vergelijking (12.24) is de locale vorm van de elektromagnetische vermogensbalans. Daar (12.11) alleen geldig is buiten de energiebronnen, is ook (12.24) alleen geldig in een bronvrij gebied.

Voor de beschouwingen omtrent de uitwisseling van energie in een materieel medium kiezen wij als uitgangspunt de overweging, dat de uitwisseling van energie tussen een in een gebied aanwezig materieel medium en zijn omgeving plaatsvindt via het randoppervlak van dit materiële medium. De normale component van de hiermee gepaard gaande oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom moet continu zijn bij doorgang door dit randoppervlak, daar er anders bij doorgang door dit oppervlak (dat geen inhoud heeft) per tijdseenheid een eindige hoeveelheid energie gewonnen zou worden of verloren zou gaan. Dit laatste zou in strijd zijn met de fysische eis, dat voor het opslaan van energie ruimte nodig is. Op grond van (11.7) en (11.8) voldoet de normale component van de vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ aan deze eis (zie ook Vraagstuk 11.3), terwijl wij in vacuüm de vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ reeds met de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom hebben geïdentificeerd (zie (12.23)). Op grond van deze overwegingen identificeren wij de vector

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{12.25}$$

ook in een materieel medium met de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom.

Hiervan uitgaande, kunnen wij door gebruikmaking van de elektromagnetische veldvergelijkingen in een materieel medium (zie (9.8) en (9.9))

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}, \tag{12.26}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{12.27}$$

de locale vorm van de vermogensbalans in een materieel medium opstellen. Daartoe vermenigvuldigen wij (12.26) scalair met $\mathbf{E}$ en (12.27)

scalair met **H**, trekken de resulterende vergelijkingen van elkaar af en gebruiken wederom (12.9). Het resultaat luidt

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}+\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{B}+\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0. \tag{12.28}$$

Teneinde dit resultaat fysisch te interpreteren, integreren wij (12.28) over het in Fig. 18 aangegeven gebied $\mathscr{V}_1$. Onder toepassing van (12.12) wordt dan verkregen

$$\iiint_{\mathscr{V}_1}\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V+\iiint_{\mathscr{V}_1}(\mathbf{E}\cdot\partial_t\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\partial_t\mathbf{B})\,\mathrm{d}V$$

$$+\oiint_{\mathscr{S}}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A=\oiint_{\mathscr{S}_{\mathrm{source}}}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A. \tag{12.29}$$

Deze vergelijking brengt wederom de wet van behoud van energie tot uitdrukking. Zonder de constitutieve vergelijkingen van het materiële medium in de beschouwing te betrekken, valt van de volume-integralen in (12.29) niet veel anders te zeggen dan dat zij tot uitdrukking brengen, dat een deel van het netto aan $\mathscr{V}_1$ toegevoerde vermogen op omkeerbare wijze en het resterende deel op onomkeerbare wijze in $\mathscr{V}_1$ in energie wordt omgezet. De op omkeerbare wijze omgezette energie is weer terug te winnen en kan worden geschreven als $\partial_t W_{\mathrm{em}}$, waarin W_{em} de in $\mathscr{V}_1$ opgeslagen elektromagnetische veldenergie voorstelt. In een aantal gevallen is W_{em} te schrijven als de som van een bijdrage W_{e} van het elektrische veld alleen en een bijdrage W_{m} van het magnetische veld alleen; in dat geval noemen wij W_{e} de in $\mathscr{V}_1$ opgeslagen elektrische veldenergie en W_{m} de in $\mathscr{V}_1$ opgeslagen magnetische veldenergie. De op onomkeerbare wijze omgezette energie gaat als dissipatie voor het elektromagnetische veld verloren; deze bijdrage schrijven wij als P_{diss}. Meestal vindt men P_{diss} als hoeveelheid ontwikkelde warmte (Eng.: heat) per eenheid van tijd $(\partial_t Q)_{\mathrm{heat}}$ terug. Voor de in (12.29) voorkomende oppervlakte-integralen gebruiken wij wederom de afkortingen (12.17) en (12.18). Het resultaat is dan, dat (12.29) kan worden geschreven als

$$P_{\mathrm{diss}}+\partial_t W_{\mathrm{em}}+P=P_{\mathrm{source}}. \tag{12.30}$$

Het is duidelijk, dat bij het herschrijven van (12.29) in de vorm (12.30) – met de daarbij behorende interpretatie – de wet van behoud van energie reeds is gebruikt.

Opmerking. Men mag niet uit het oog verliezen, dat de hier gegeven beschouwingen en interpretaties zijn gebaseerd op tijdonafhankelijke gebieden en stilstaande materiële media.

Indien de constitutieve vergelijkingen van het materiële medium ons ter beschikking staan, kunnen door invullen van deze vergelijkingen in (12.29) de in (12.30) voorkomende termen worden geïdentificeerd. Ter illustratie van deze methode beschouwen wij een medium waarvoor de constitutieve vergelijkingen als volgt luiden (zie (10.7) t/m (10.9))

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{12.31}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{12.32}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r},t). \tag{12.33}$$

Behalve locaal en instantaan reagerend, is dit medium tijdinvariant, lineair en isotroop, maar in het algemeen inhomogeen. Invullen van (12.31) t/m (12.33) in (12.29) geeft

$$\iiint_{\mathscr{V}_1} \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V + \partial_t \iiint_{\mathscr{V}_1} (\tfrac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\,\mathrm{d}V$$

$$+ \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A = \oiint_{\mathscr{S}_{\text{source}}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A. \tag{12.34}$$

Een vergelijking met (12.30) leert, dat voor het beschouwde medium

$$P_{\text{diss}} = \iiint_{\mathscr{V}_1} \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{12.35}$$

en

$$W_{\text{em}} = W_{\text{e}} + W_{\text{m}}, \tag{12.36}$$

met

$$W_{\text{e}} = \iiint_{\mathscr{V}_1} \tfrac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{12.37}$$

en

$$W_{\text{m}} = \iiint_{\mathscr{V}_1} \tfrac{1}{2}\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}\,\mathrm{d}V. \tag{12.38}$$

De vermogensbalans voor de uitwisseling van elektromagnetische energie staat in de literatuur ook bekend als het theorema van POYNTING; onafhankelijk van POYNTING kwam HEAVISIDE tot een overeenkomstig resultaat.

Tot slot zijn in Tabel 8 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 8. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
elektrische veldenergie	W_e	joule	J
magnetische veldenergie	W_m	joule	J
elektromagnetisch vermogen	P	watt	W
volumedichtheid van elektrische veldenergie	w_e	joule per kubieke meter	J/m^3
volumedichtheid van magnetische veldenergie	w_m	joule per kubieke meter	J/m^3
poyntingvector	S	watt per vierkante meter	W/m^2

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 12.1. In een bol met middelpunt $\mathcal{O}$ en straal a bevindt zich een uniform verdeelde elektrische lading Q. De ladingsverdeling bevindt zich in vacuüm. Laat r de afstand zijn van het middelpunt van de bol naar een punt van waarneming (zie Vraagstuk 8.3). Bepaal (a) de elektrische veldenergie $W_{e,1}$ in het gebied $0 \leq r < a$, (b) de elektrische veldenergie $W_{e,2}$ in het gebied $a < r < \infty$, (c) de totale elektrische veldenergie $W_e = W_{e,1} + W_{e,2}$ in de configuratie. (d) Druk $W_{e,1}$ en $W_{e,2}$ uit in breukdelen van W_e. (e) Wat gebeurt er met $W_{e,1}$, $W_{e,2}$ en W_e, indien Q constant blijft en $a \to 0$?
Antwoord: (a) $W_{e,1} = (1/10)(Q^2/4\pi\varepsilon_0 a)$; (b) $W_{e,2} = \frac{1}{2}(Q^2/4\pi\varepsilon_0 a)$; (c) $W_e = (3/5) \times (Q^2/4\pi\varepsilon_0 a)$; (d) $W_{e,1} = (1/6)\,W_e$, $W_{e,2} = (5/6)\,W_e$; (e) $W_{1,e} \to \infty$, $W_{2,e} \to \infty$ en $W_e \to \infty$ voor $a \to 0$.

Vraagstuk 12.2. De uniform geladen bol met totale elektrische lading $-e$ is een klassiek model van een elektron. Door de elektrische veldenergie van deze ladingsverdeling gelijk te stellen aan de mechanische rustenergie van het elektron ($= m_e c_0^2$, zie Par. 6) kan men de zgn. klassieke straal r_0 van het elektron bepalen. Geef de uitdrukking voor r_0 en substitueer hierin de waarden voor e, ε_0, m_e en c_0 ($e = 1.6021 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1091 \times 10^{-31}$ kg, $\varepsilon_0 c_0^2 = \mu_0^{-1}$ met $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m).
Antwoord: $r_0 = 3e^2\mu_0/20\pi m_e$; $r_0 = 1.6907 \times 10^{-15}$ m.

Vraagstuk 12.3. Leid uit Vergelijking (12.11) de locale vorm af van de elektromagnetische vermogensbalans voor een stationaire stroming van geladen deeltjes (zie ook Vergelijking (12.24)).
Antwoord: $\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = 0$ of $(\partial_t w)_{\text{mech}} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0$.

Vraagstuk 12.4. In een begrensd gebied $\mathcal{V}_1$ in de ruimte is op het tijdstip $t = t_0$ een elektromagnetisch veld aanwezig, dat is opgewekt door bronnen die voor $t < t_0$ werkzaam zijn geweest. Op $t = t_0$ worden de bronnen uitgeschakeld. Het elektromagnetische

veld wordt niet meer in stand gehouden en bijgevolg is $\lim_{t\to\infty} W_{em} = 0$. Bewijs met behulp van Vergelijking (12.30), dat $\int_{t_0}^{\infty} P_{diss}\,dt + \int_{t_0}^{\infty} P\,dt = W_{em}(t_0)$.

Vraagstuk 12.5. In de configuratie van Fig. 18 zijn de elektromagnetische veldvectoren periodieke functies van de tijd met periode T. Bewijs, uitgaande van Vergelijking (12.30), dat $\langle P_{diss}\rangle_T + \langle P\rangle_T = \langle P_{source}\rangle_T$, waarin $\langle \ldots\rangle_T \stackrel{def}{=} T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T} \ldots\,dt$ de gemiddelde waarde over een periode aangeeft.

13. Beknopte theorie van de warmtegeleiding

Zoals in Par. 12 is uiteengezet, kan in een materieel medium een deel van het elektromagnetische vermogen dat aan een bepaalde configuratie wordt toegevoerd, als gedissipeerde warmte voor het elektromagnetische veld verloren gaan. Uit de natuurkunde is bekend, dat het toevoeren van warmte leidt tot verhoging van de temperatuur. Hierdoor kunnen allerlei fysische eigenschappen van de configuratie worden beïnvloed. In vele gevallen is dit een ongewenst effect; in een elektronische schakeling bijvoorbeeld, kan een bepaalde stijging van de temperatuur leiden tot het niet meer functioneren van de schakeling. Bijgevolg is het nuttig om enig inzicht te hebben in de wetten die de geleiding van warmte door een materieel medium beschrijven. Via geleiding — naast straling en convectie — kan nl. de ontwikkelde warmte ook weer worden afgevoerd, waardoor de stijging van temperatuur kan worden beperkt. Achtereenvolgens zullen wij in deze paragraaf bespreken: (a) de grondvergelijkingen van de theorie van de warmtegeleiding, (b) de constitutieve vergelijking voor de warmtegeleiding en (c) de randvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee verschillende media.

(a) *Grondvergelijkingen van de theorie van de warmtegeleiding*

De eerste grondvergelijking van de theorie van de warmtegeleiding is in wezen niets anders dan de wet van behoud van energie (in de vorm van warmte). Deze wet is gebaseerd op de opvatting, dat warmte een vorm van energie is. Beschouw een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in een materieel medium (in vacuüm treedt geen geleiding van warmte op) en laat $\mathscr{S}$ het begrensde, gesloten randoppervlak van $\mathscr{V}$ zijn. De eenheidsvector langs de naar buiten, d.w.z. van $\mathscr{V}$ af, gerichte normaal op $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathbf{n}$ (Fig. 19). Dan geldt

$$\partial_t Q + \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\,\mathrm{d}A = (\partial_t Q)_{\mathrm{gen}}, \tag{13.1}$$

waarin

Q = hoeveelheid in $\mathscr{V}$ opgeslagen warmte,
$\mathbf{q}$ = warmtestroomdichtheid op $\mathscr{S}$,
$(\partial_t Q)_{\text{gen}}$ = tempo waarin warmte in $\mathscr{V}$ wordt ontwikkeld.

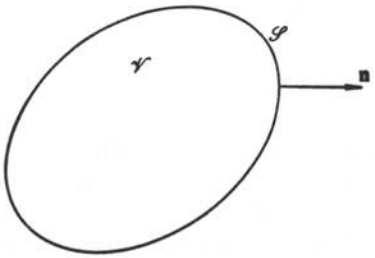


Fig. 19. De warmtebalans voor het gebied $\mathscr{V}$ binnen het begrensde gesloten oppervlak $\mathscr{S}$.

De tweede term in het linkerlid van (13.1) stelt de hoeveelheid warmte voor die per eenheid van tijd door $\mathscr{S}$ heen uit $\mathscr{V}$ wordt afgevoerd, zodat (13.1) inderdaad de wet van behoud van (warmte)vermogen tot uitdrukking brengt.

Van de in (13.1) voorkomende grootheden Q en $(\partial_t Q)_{\text{gen}}$ voeren wij vervolgens de ruimtelijke dichtheden in. Daartoe beschouwen wij een ruimtelijk deelgebied $\Delta\mathscr{V}$ van $\mathscr{V}$ dat een punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ als inwendig punt bevat; de inhoud van $\Delta\mathscr{V}$ noemen wij ΔV. Laat ΔQ de hoeveelheid in $\Delta\mathscr{V}$ opgeslagen warmte zijn, dan wordt de ruimtelijke dichtheid van opgeslagen warmte ingevoerd als

$$w_{\text{h}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{\text{gr}}} \Delta Q/\Delta V. \tag{13.2}$$

In de limiet in het rechterlid van (13.2) is $\mathscr{V}_{\text{gr}}$ wederom een korrel van het beschouwde materiaal en blijft $\mathbf{r}$ een inwendig punt van $\mathscr{V}_{\text{gr}}$ (zie Par. 2). Op grond van de continuümshypothese is de aldus verkregen $w_{\text{h}} = w_{\text{h}}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$. Met behulp van de definitie (13.2) is voor de totale hoeveelheid in het gebied $\mathscr{V}$ opgeslagen warmte $Q = Q(t)$ te schrijven

$$Q = \iiint_{\mathscr{V}} w_{\text{h}}\, \mathrm{d}V. \tag{13.3}$$

Op soortgelijke wijze wordt de ruimtelijke dichtheid van het tempo waarin warmte wordt ontwikkeld, ingevoerd als

$$(\partial_t w_h)_{gen} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta\mathscr{V}\to\mathscr{V}_{gr}} \Delta(\partial_t Q)_{gen}/\Delta V, \tag{13.4}$$

waarin $\Delta(\partial_t Q)_{gen}$ de hoeveelheid in $\Delta\mathscr{V}$ ontwikkelde warmte per eenheid van tijd voorstelt. Op grond van de continuümshypothese is de aldus verkregen $(\partial_t w_h)_{gen} = (\partial_t w_h)_{gen}(\mathbf{r}, t)$ een continue functie van $\mathbf{r}$. Met behulp van de definitie (13.4) is voor het totale tempo waarin warmte in $\mathscr{V}$ wordt ontwikkeld, $(\partial_t Q)_{gen} = (\partial_t Q)_{gen}(t)$ te schrijven

$$(\partial_t Q)_{gen} = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_h)_{gen}\, dV. \tag{13.5}$$

Substitutie van (13.3) en (13.5) in (13.1) geeft

$$\partial_t \iiint_{\mathscr{V}} w_h\, dV + \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\, dA = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_h)_{gen}\, dV. \tag{13.6}$$

In een gebied waar de warmtestroomdichtheid een continu differentieerbare functie van de plaatscoördinaten is, is de tweede term in het linkerlid van (13.6) met gebruikmaking van de divergentiestelling van GAUSS (zie (B.39)) te herleiden tot

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}\, dA = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\mathbf{q}\, dV. \tag{13.7}$$

Substitutie van (13.7) in (13.6) leidt tot

$$\iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_h + \operatorname{div}\mathbf{q})\, dV = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_h)_{gen}\, dV, \tag{13.8}$$

waarbij in de eerste term in het linkerlid gebruik is gemaakt van de omstandigheid dat $\mathscr{V}$ een tijdonafhankelijk gebied is. Daar (13.8) moet gelden voor een willekeurig gebied $\mathscr{V}$ en de integranden continu zijn ondersteld, leidt (13.8) tot de betrekking

$$\partial_t w_h + \operatorname{div}\mathbf{q} = (\partial_t w_h)_{gen}. \tag{13.9}$$

Vergelijking (13.9) is te beschouwen als de locale vorm van de (warmte)-vermogensbalans.

Behalve de in (13.1) of (13.9) optredende grootheden speelt in de theorie van de warmtegeleiding het begrip (thermodynamische of absolute) temperatuur T een rol. Op grond van een microscopische beschouwing van de chaotische beweging van de elementaire bouwstenen van de materie is de temperatuur — en in het bijzonder de grootheid kT, waarin k = constante van BOLTZMANN ($k = 1.3806 \times 10^{-23}$

J/K) — een maat voor de in die beweging opgeslagen kinetische energie, als onderdeel van de zgn. inwendige energie van de configuratie. Tussen w_h en T blijkt in ieder punt van een materieel medium een bepaald verband te bestaan. In de macroscopische theorie van de warmte schrijft men dit verband als

$$w_h(\mathbf{r},t) = \rho_m(\mathbf{r})c(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t), \tag{13.10}$$

waarin

ρ_m = massadichtheid,
c = soortelijke warmte.

Substitutie van (13.10) in (13.9) leidt tot de vergelijking

$$\rho_m c\,\partial_t T + \operatorname{div}\mathbf{q} = (\partial_t w_h)_{gen}. \tag{13.11}$$

Deze vergelijking staat bekend als de *warmtegeleidingsvergelijking.*

(b) *Constitutieve vergelijking voor de warmtegeleiding*

De constitutieve vergelijking voor de warmtegeleiding geeft het verband aan dat er tussen $\mathbf{q}$ en de afgeleiden van T naar de plaatscoördinaten bestaat. („Warmte stroomt van een punt met hogere naar een punt met lagere temperatuur".) Voor een grote klasse van materialen is dit verband te schrijven als

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t) = -\lambda(\mathbf{r})\,\mathbf{grad}\,T(\mathbf{r},t), \tag{13.12}$$

waarin

λ = soortelijke warmtegeleiding.

Vergelijking (13.12) brengt tot uitdrukking, dat warmtegeleiding een diffusieproces is (zie Par. 3). Wat de warmtegeleidingseigenschappen van het materiaal betreft, is in (13.12) ondersteld, dat het materiaal (a) locaal reagerend, (b) instantaan reagerend, (c) tijdinvariant, (d) lineair, (e) isotroop en (f) in het algemeen inhomogeen is. Voor de betekenis van de gebruikte termen verwijzen wij naar de in Par. 10 gegeven overeenkomstige klassificering van de elektromagnetische eigenschappen van een materieel medium.

(c) *Randvoorwaarden aan het scheidingsvlak van twee verschillende media*

Bij doorgang door het oppervlak waar twee media met van elkaar verschillende warmtegeleidingseigenschappen aan elkaar grenzen, ver-

anderen in het algemeen de grootheden w_h, T en $\mathbf{q}$ abrupt van waarde. Daar op fysische gronden deze grootheden alleen eindige waarden kunnen aannemen, laten wij bij abrupte overgangen alleen *eindige sprongen* in w_h, T en/of $\mathbf{q}$ toe. In een gebied echter waar sprongen in w_h, T en/of $\mathbf{q}$ optreden, zijn deze grootheden niet meer differentieerbaar en verliezen de vergelijkingen van het type (13.9) en (13.12) hun geldigheid. Nu zullen wij ons bij het afleiden van de betrekkingen die er tussen de limietwaarden van de verschillende grootheden ter weerszijden van het scheidingsvlak bestaan, beperken tot het geval dat dit scheidingsvlak tijdonafhankelijk is. Het niet meer differentieerbaar zijn van de grootheden beperkt zich dan tot het niet meer bestaan van de afgeleiden naar de plaatscoördinaten, daar de configuratie zich niet wijzigt in de loop van de tijd. Om de gezochte randvoorwaarden af te leiden, zullen wij — evenals in Par. 11 — gebruik maken van vergelijkingen waarin geen afgeleiden naar de plaatscoördinaten voorkomen. In de plaats van (13.9) treedt dan (13.6), gecombineerd met (13.10). De met (13.12) corresponderende vergelijking vinden wij door gebruik te maken van de betrekking

$$\int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{grad}\,T\;\mathrm{d}s = T(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}},t) - T(\mathbf{r}_{\mathscr{P}},t), \tag{13.13}$$

waarbij $\boldsymbol{\tau}$ de eenheidsvector langs de raaklijn aan de integratieweg is, die van $\mathscr{P}$ naar $\mathscr{Q}$ wordt doorlopen. Van de gevolgde integratieweg in het linkerlid behoeven alleen het beginpunt $\mathscr{P}$ en het eindpunt $\mathscr{Q}$ te worden gespecificeerd, daar het antwoord onafhankelijk is van de tussen $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$ gevolgde weg. Toepassen van (13.13) op (13.12) leidt tot

$$\int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \lambda^{-1}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{q}\;\mathrm{d}s = T(\mathbf{r}_{\mathscr{P}},t) - T(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}},t). \tag{13.14}$$

Daar de randvoorwaarden locale voorwaarden zijn, kunnen wij ons onderzoek beperken tot de onmiddellijke omgeving van het scheidingsvlak; bovendien kunnen wij dit dan locaal als een plat vlak beschouwen. De limietwaarden van de grootheden en van de eigenschappen van het medium aan de ene zijde van het scheidingsvlak duiden wij aan met de index 1, de limietwaarden van de grootheden en van de eigenschappen van het medium aan de andere zijde van het scheidingsvlak duiden wij aan met de index 2. Het scheidingsvlak zelf duiden wij aan met Σ, terwijl de van „Zijde 1" naar „Zijde 2" gerichte eenheidsvector langs de normaal op Σ wordt aangeduid met $\boldsymbol{\nu}$. Het punt op Σ waar wij de randvoorwaarden willen afleiden, noemen wij $\mathscr{P}$.

In de eerste plaats passen wij (13.6) toe op het cirkelcilindrische gebied dat wordt begrensd door het oppervlak $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 + \mathscr{S}_3$,

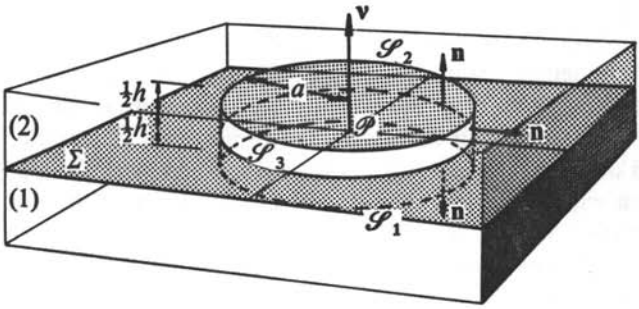


Fig. 20. Randvoorwaarde voor de normale component van **q** *aan het scheidingsvlak van twee verschillende media.*

waarvan het grondvlak $\mathscr{S}_1$ en het kopvlak $\mathscr{S}_2$ (beide cirkels met straal a) evenwijdig zijn aan Σ en waarvan het manteloppervlak $\mathscr{S}_3$ (ter hoogte h) evenwijdig is aan $\mathbf{v}$ (Fig. 20). Daar $\partial_t w_h$ en $(\partial_t w_h)_{gen}$ begrensd zijn, geldt

$$\iiint_{\mathscr{V}} \partial_t w_h \, dV \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0 \tag{13.15}$$

en

$$\iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_h)_{gen} \, dV \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{13.16}$$

Daar **q** begrensd is, geldt verder

$$\iint_{\mathscr{S}_3} \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} \, dA \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{13.17}$$

Verder brengen wij in rekening, dat

$$\mathbf{n} = -\mathbf{v} \quad \text{op } \mathscr{S}_1 \qquad \text{en} \qquad \mathbf{n} = \mathbf{v} \quad \text{op } \mathscr{S}_2. \tag{13.18}$$

Uit (13.6), (13.15), (13.16), (13.17) en (13.18) volgt

$$-\iint_{\mathscr{S}_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 \, dA + \iint_{\mathscr{S}_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 \, dA \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{13.19}$$

Toepassen van de middelwaardestelling uit de integraalrekening op

$$(\pi a^2)^{-1} \left[-\iint_{\mathscr{S}_1} \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 \, dA + \iint_{\mathscr{S}_2} \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 \, dA \right] \to 0$$

$$\text{voor } h \to 0 \quad \text{en} \quad a \to 0 \tag{13.20}$$

leidt dan tot

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{13.21}$$

Daar $\mathscr{P}$ een willekeurig punt van Σ voorstelt, volgt tenslotte uit (13.21)

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{13.22}$$

Deze vergelijking brengt tot uitdrukking, dat de *normale component van de warmtestroomdichtheid continu* is bij doorgang door het scheidingsvlak van twee verschillende media.

In de tweede plaats passen wij (13.14) toe op de rechte lijn ter lengte h, die van $\mathscr{P}_1$ naar $\mathscr{P}_2$ loopt en evenwijdig is aan $\mathbf{v}$ (Fig. 21). Daar $\mathbf{q}$ begrensd is en $\lambda \neq 0$, geldt

$$\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \lambda^{-1}\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{q}\,ds \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{13.23}$$

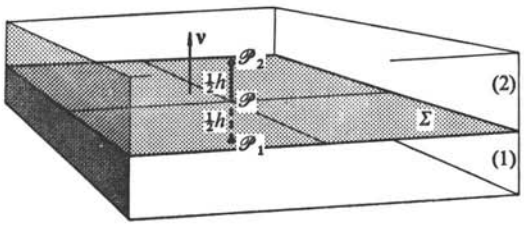


Fig. 21. Randvoorwaarde voor de temperatuur aan het scheidingsvlak van twee verschillende media.

Uit (13.14) en (13.23) volgt

$$T_1 - T_2 \to 0 \qquad \text{voor } h \to 0, \tag{13.24}$$

zodat

$$T_2 = T_1 \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{13.25}$$

Daar $\mathscr{P}$ een willekeurig punt van Σ voorstelt, volgt tenslotte uit (13.25)

$$T_2 = T_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{13.26}$$

De randvoorwaarde (13.26) geldt alleen bij een zeer goed thermisch contact tussen de twee media. Bij minder goed contact bevindt zich vaak tussen de randoppervlakken van beide media een zeer dunne laag van thermisch zeer slecht geleidend materiaal (zoals b.v. een laagje stilstaande lucht). In dit geval is in een zeer dunne laag om Σ heen λ zeer klein, dus λ^{-1} zeer groot, en geldt (13.23) niet meer. Vergelijking (13.14)

blijft echter geldig en $T(\mathbf{r}_{\mathscr{P}_1}, t)$ en $T(\mathbf{r}_{\mathscr{P}_2}, t)$ blijven eindig. Derhalve moet ook het linkerlid van (13.23) eindig blijven in de limiet $h \to 0$. Daar verder langs $\mathscr{P}_1\mathscr{P}_2$ geldt $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}$ en aan (13.21) moet worden voldaan, kunnen wij stellen

$$\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \lambda^{-1}\, \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{q}\, ds \to \alpha^{-1}\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 \qquad \text{voor } h \to 0, \tag{13.27}$$

of

$$\int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} \lambda^{-1}\, \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{q}\, ds \to \alpha^{-1}\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 \qquad \text{voor } h \to 0. \tag{13.28}$$

Substitutie van (13.27) of (13.28) in (13.14) leidt tot

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 = \alpha(T_1 - T_2) \quad \text{in } \mathscr{P}, \tag{13.29}$$

of

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 = -\alpha(T_2 - T_1) \quad \text{in } \mathscr{P}. \tag{13.30}$$

Daar $\mathscr{P}$ een willekeurig punt van Σ voorstelt, leiden (13.29) en (13.30) tenslotte tot

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_1 = \alpha(T_1 - T_2) \quad \text{op } \Sigma, \tag{13.31}$$

of

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}_2 = -\alpha(T_2 - T_1) \quad \text{op } \Sigma. \tag{13.32}$$

De grootheid α, die in (13.27) en (13.28) is ingevoerd, hangt af van de wijze waarop in de zeer dunne laag om Σ heen de warmteoverdracht plaatsvindt en heet de *warmteoverdrachtscoëfficiënt*. De randvoorwaarde (13.31) of (13.32) is met goede benadering van toepassing indien het randoppervlak van een bepaalde configuratie geforceerd met een gasstroom of een vloeistofstroom wordt gekoeld. De waarden van α worden doorgaans experimenteel bepaald.

Tot slot bespreken wij nog twee speciale gevallen van randvoorwaarden.

(c1) *Isotherm oppervlak*. Een isotherm oppervlak is een oppervlak dat zodanig wordt verwarmd of gekoeld, dat $T =$ constante langs dat oppervlak.

(c2) *Volkomen warmte-isolerend oppervlak*. Door een volkomen warmte-isolerend oppervlak vindt geen transport van warmte plaats, zodat $\mathbf{v}\cdot\mathbf{q} \to 0$ bij nadering van zo'n oppervlak via het definitiegebied van $\mathbf{q}$.

Voor *stationaire warmtestroming* geldt $\partial_t Q = 0$ en $\partial_t w_h = 0$. In dit geval gaat (13.1) over in

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, \mathrm{d}A = (\partial_t Q)_{\mathrm{gen}} \qquad \text{(stationaire warmtestroming)} \qquad (13.33)$$

en (13.9) in

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = (\partial_t w_h)_{\mathrm{gen}} \qquad \text{(stationaire warmtestroming).} \qquad (13.34)$$

Voor de berekening van de temperatuurverdeling in een groot aantal warmtegeleidende configuraties verwijzen wij naar CARSLAW and JAEGER [16]. Uitgangspunt hierbij is de partiële differentiaalvergelijking

$$\rho_m c \, \partial_t T - \operatorname{div}(\lambda \, \mathbf{grad} \, T) = (\partial_t w_h)_{\mathrm{gen}} \qquad (13.35)$$

waaraan de temperatuur moet voldoen en die uit (13.11) ontstaat door hierin (13.12) te substitueren.

Voor de getalwaarden van ρ_m, c en λ voor uiteenlopende materialen verwijzen wij naar het AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook* [17].

Tot slot zijn in Tabel 9 de SI-eenheden vermeld waarin de grootheden die in deze paragraaf zijn ingevoerd, worden uitgedrukt.

Tabel 9. Grootheden en eenheden van het Internationale Stelsel van Eenheden (SI)

Grootheid		*Eenheid*	
naam	*symbool*	*naam*	*symbool*
hoeveelheid warmte	Q	joule	J
warmtestroomdichtheid	$\mathbf{q}$	watt per vierkante meter	W/m^2
(thermodynamische of absolute) temperatuur	T	kelvin	K
(massa)dichtheid	ρ_m	kilogram per kubieke meter	kg/m^3
soortelijke warmte	c	joule per kilogram kelvin	J/kg K
soortelijke warmtegeleiding	λ	watt per meter kelvin	W/m K
warmteoverdrachtscoëfficiënt	α	watt per vierkante meter kelvin	W/m^2 K

16. CARSLAW, H. S. and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, 2nd. ed., Oxford, Clarendon Press, 1959.
17. AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook*, 3rd. ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1972.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 13.1. Geef de uitdrukking voor $(\partial_t w_h)_{gen}$ die afkomstig is van een elektrische stroom in een materieel medium, als voor dit medium de elektromagnetische constitutieve vergelijking $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ geldig is.
Antwoord: $(\partial_t w_h)_{gen} = \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$.

Vraagstuk 13.2. Waar gaat Vergelijking (13.35) in over, indien het beschouwde medium homogeen is en voor de grootheid $(\partial_t w_h)_{gen}$ het antwoord van Vraagstuk 13.1 geldig is?
Antwoord: $(\rho_m c/\lambda)\partial_t T - \nabla^2 T = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{J})/\sigma\lambda$.

Vraagstuk 13.3. Waar gaat het antwoord van Vraagstuk 13.2 in over, indien de warmtestroming stationair is?
Antwoord: $\nabla^2 T = -(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J})/\sigma\lambda$.

Vraagstuk 13.4. Een volkomen warmtegeïsoleerd lichaam neemt een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte in beslag; het gesloten randoppervlak van $\mathscr{V}$ noemen wij $\mathscr{S}$. Bewijs, met behulp van de Vergelijkingen (13.1), (13.3), (13.10) en de voorwaarde $\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0$ op $\mathscr{S}$, dat $\partial_t \iiint_{\mathscr{V}} \rho_m c T \,\mathrm{d}V = (\partial_t Q)_{gen}$.

Vraagstuk 13.5. In een configuratie die een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte in beslag neemt, vindt een stationaire produktie van warmte plaats in het tempo $(\partial_t Q)_{gen}$. De configuratie bevindt zich in een omringend medium met temperatuur T_0. Het gesloten randoppervlak $\mathscr{S}$ van $\mathscr{V}$ heeft een warmteoverdrachtscoëfficiënt α. Bewijs, dat in de stationaire toestand geldt $\iint_{\mathscr{S}} \alpha(T - T_0)\,\mathrm{d}A = (\partial_t Q)_{gen}$.

Vraagstuk 13.6. In een plak materiaal vindt in de richting loodrecht op de grensvlakken eendimensionaal stationair transport van warmte plaats. In de plak wordt geen warmte ontwikkeld; de grootheden ρ_m, c en λ van het materiaal zijn constant. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat de plak samenvalt met $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z_1 < z < z_2$. Het oppervlak $z = z_1$ bevindt zich op een constante temperatuur T_1, het oppervlak $z = z_2$ bevindt zich op een constante temperatuur T_2. Bepaal (a) de differentiaalvergelijking waaraan $T = T(z)$ in $z_1 < z < z_2$ moet voldoen, (b) het verloop van $T = T(z)$ in $z_1 < z < z_2$, (c) de grootheid $\mathbf{q} = q\mathbf{i}_z$.
Antwoord: (a) $\partial_z^2 T = 0$; (b) $T = [T_1(z_2 - z) + T_2(z - z_1)]/(z_2 - z_1)$; (c) $q = \lambda(T_1 - T_2)/(z_2 - z_1)$.

Vraagstuk 13.7. In een massieve, uit elektrisch geleidend materiaal bestaande cilinder loopt, uniform over de dwarsdoorsnede verdeeld, een stationaire elektrische stroom I. De dwarsdoorsnede van de cilinder is een cirkel met straal a. De soortelijke (elektrische) geleiding van het materiaal is σ, de soortelijke warmtegeleiding is λ. De warmteoverdrachtscoëfficiënt van de cilindermantel is α. Het omringende medium heeft een temperatuur T_0. Voer cirkelcilindercoördinaten r, θ, z in zodanig, dat de z-as samenvalt met de as van de cirkelcilinder. Bepaal (a) $\mathbf{J} = J_z\mathbf{i}_z$ voor $0 \le r < a$, (b) $(\partial_t w_h)_{gen}$ voor $0 \le r < a$, (c) $\mathbf{q} = q_r\mathbf{i}_r$ voor $0 \le r < a$, (d) T voor $0 \le r < a$. (Aanwijzing: maak achtereenvolgens gebruik van Vraagstuk 13.1 en van de Vergelijkingen (13.1), (13.12) en (13.31).)
Antwoord: (a) $J_z = I/\pi a^2$; (b) $(\partial_t w_h)_{gen} = I^2/\pi^2 a^4 \sigma$; (c) $q_r = (I^2/2\pi^2 a^4 \sigma) r$; (d) $T = T_0 + (I^2/4\pi^2 a^2 \sigma\lambda)(2\lambda/\alpha a + 1 - r^2/a^2)$.

Vraagstuk 13.8. In een holle, uit elektrisch geleidend materiaal bestaande cilinder loopt, uniform over de dwarsdoorsnede verdeeld, een stationaire elektrische stroom I. De dwarsdoorsnede van de cilinder is het gebied begrensd door twee concentrische cirkels met stralen a resp. b ($a < b$). De soortelijke (elektrische) geleiding van het materiaal is σ, de soortelijke warmtegeleiding is λ. De warmteoverdrachtscoëfficiënt van de binnenmantel van de geleider is α, de buitenmantel is volledig warmtegeïsoleerd. De binnenmantel wordt gekoeld door een medium op temperatuur T_0. Voer cirkelcilindercoördinaten r, θ, z in zodanig, dat de z-as samenvalt met de as van de geleider. Bepaal (a) $\mathbf{J} = J_z \mathbf{i}_z$ voor $a < r < b$, (b) $(\partial_t w_h)_{gen}$ voor $a < r < b$, (c) $\mathbf{q} = q_r \mathbf{i}_r$ voor $a < r < b$, (d) T voor $a < r < b$. (Aanwijzing: maak achtereenvolgens gebruik van Vraagstuk 13.1 en van de Vergelijkingen (13.1), (13.12) en (13.31).)

Antwoord: (a) $J_z = I/A$ met $A = \pi(b^2 - a^2)$; (b) $(\partial_t w_h)_{gen} = I^2/\sigma A^2$; (c) $q_r = -(I^2/2\sigma A^2) \times (b^2/r - r)$; (d) $T = (I^2/2\sigma\lambda A^2)[b^2 \ln(r/a) - \frac{1}{2}(r^2 - a^2) - (\lambda/\alpha a)(b^2 - a^2)] + T_0$.

14. Stationaire elektrische stroming in een elektrisch geleidende configuratie

In deze paragraaf onderzoeken wij de eigenschappen van de configuratie die bestaat uit een elektrisch geleidend materiaal waarop of waarin elektroden zijn aangebracht en waarin een stationaire elektrische stroom vloeit onder invloed van aan de elektroden aangelegde elektrische spanningen. Het elektrisch geleidende medium neemt een gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte in beslag (Fig. 22). Op het randoppervlak $\mathscr{S}$ van $\mathscr{V}$ is een eindig aantal elektroden aangebracht. De elektrode met rangnummer n beslaat het oppervlak $\mathscr{S}_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$), waarin $N+1 =$ aantal elektroden. De elektroden onderstellen wij elektrisch volkomen geleidend. Het niet

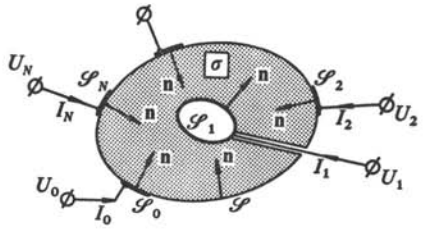


Fig. 22. Configuratie waarin een stationaire, elektrische stroom loopt.

door de elektroden in beslag genomen deel van $\mathscr{S}$ onderstellen wij volkomen geïsoleerd. Wat het transport van ladingdragers in het elektrisch geleidende materiaal betreft, zullen wij onderstellen, dat dit in hoofdzaak tot stand komt onder invloed van het elektrische veld (driftstroom); de diffusiestroom (zie Par. 3) zullen wij verwaarlozen.

Opmerking. Indien in het materiaal ook de diffusiestroom van de verschillende soorten ladingdragers in rekening moet worden gebracht, worden niet alleen de constitutieve vergelijkingen ingewikkelder, maar ook moeten de diffusievergelijkingen voor de verschillende soorten ladingdragers in

de beschouwing worden betrokken. Hierbij is het nodig om te specificeren, hoe de ladingdragers ontstaan en hoe zij tenietgaan. De behandeling van deze problemen valt wegens haar gecompliceerdheid buiten ons bestek. De problemen zijn echter wel van fundamentele betekenis voor de stroming van ladingdragers (elektronen en gaten) in halfgeleidende materialen en de oplossing ervan is van groot praktisch belang bij het ontwerpen van geïntegreerde schakelingen. Voor een behandeling van de grondvergelijkingen die het transport van ladingdragers onder de gecombineerde invloed van drift en diffusie beschrijven, verwijzen wij naar McKELVEY[18].

Achtereenvolgens zullen voor de in Fig. 22 weergegeven configuratie aan de orde komen (a) de grondvergelijkingen voor de theorie van de stationaire elektrische stroming, (b) de constitutieve vergelijking voor het elektrisch geleidende materiaal, (c) de differentiaalvergelijking voor de elektrische potentiaal, (d) de randvoorwaarden aan een oppervlak waar de soortelijke geleiding een sprong vertoont, (e) de randvoorwaarden op het randoppervlak van de configuratie, (f) de gegeneraliseerde stelling van TELLEGEN, (g) het toegevoerde elektromagnetische vermogen en de ontwikkelde hoeveelheid warmte, (h) de eenduidigheidsstelling, (i) de superpositiestelling, (j) de conductantiematrix en de weerstandsmatrix, (k) de reciprociteitsstelling, (l) de berekening van het veldpatroon in de configuratie.

(a) *Grondvergelijkingen voor de theorie van de stationaire elektrische stroming*

Zoals in Par. 2 is afgeleid, geldt voor stationaire elektrische stroming de betrekking (zie (2.35))

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{14.1}$$

voor ieder willekeurig gesloten oppervlak $\mathscr{S}$. In een gebied waar de (drift)stroomdichtheid $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ een continu differentieerbare functie van de plaatscoördinaten is, is (14.1) gelijkwaardig met (zie (2.36))

18. McKELVEY, J.P., *Solid state and semiconductor physics.* New York, Harper and Row Publishers, 1966. Section 10.2.

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \tag{14.2}$$

Daar voor de beschouwde tijdonafhankelijke velden geldt $\partial_t \equiv 0$, volgt voor de elektrische veldsterkte uit (9.13) de vergelijking

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} \, ds = 0, \tag{14.3}$$

voor iedere willekeurige enkelvoudig gesloten kromme $\mathscr{C}$. In een gebied waar de elektrische veldsterkte $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ een continu differentieerbare functie van de plaatscoördinaten is, is (14.3) gelijkwaardig met (zie ook (9.9))

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{14.4}$$

Aan (14.3) en (14.4) is identiek te voldoen door een elektrische potentiaal $V = V(\mathbf{r})$ in te voeren via de betrekking

$$V(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} V(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E} \, ds, \tag{14.5}$$

waarin de integratieweg van het punt met plaatsvector $\mathbf{r}_0$ naar het punt met plaatsvector $\mathbf{r}$ via het definitiegebied van $\mathbf{E}$ moet verlopen; op grond van (14.3) is echter de gevolgde integratieweg overigens willekeurig. Vergelijking (14.5) brengt tot uitdrukking, dat in één punt van het definitiegebied van $\mathbf{E}$ de elektrische potentiaal willekeurig kan worden voorgeschreven. Uit (14.5) valt verder af te leiden

$$\mathbf{grad}\, V = -\mathbf{E}, \tag{14.6}$$

waarin

$$\mathbf{grad}\, V \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\partial_x V)\, \mathbf{i}_x + (\partial_y V)\, \mathbf{i}_y + (\partial_z V)\, \mathbf{i}_z, \tag{14.7}$$

zodat de uit

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V \tag{14.8}$$

volgende elektrische veldsterkte inderdaad aan (14.3) en (14.4) voldoet.

(b) *Constitutieve vergelijking voor het elektrisch geleidende materiaal*

Tussen de (drift)stroomdichtheid $\mathbf{J}$ en de elektrische veldsterkte $\mathbf{E}$ bestaat de betrekking (zie (10.23))

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{14.9}$$

waarin voor het lineaire gebied (zie Par. 10) de soortelijke geleiding σ onafhankelijk is van de elektrische veldsterkte. In het algemeen is het geleidende medium inhomogeen, zodat $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$. Uit de in Par. 2 behandelde theorie volgt, dat voor de stroomdichtheid is te schrijven (zie (2.25) en (2.32))

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} N^{(\alpha)} q^{(\alpha)} \mathbf{v}_{\text{conv}}^{(\alpha)}, \tag{14.10}$$

waarin $N^{(\alpha)}$ de concentratie van de ladingdragers van de soort α is, $q^{(\alpha)}$ hun elektrische lading en $\mathbf{v}_{\text{conv}}^{(\alpha)}$ hun convectiesnelheid. Op grond van microscopische beschouwingen omtrent de beweging van elektrisch geladen deeltjes in een vaste stof waarin een elektrisch veld aanwezig is, stelt men

$$\mathbf{v}_{\text{conv}}^{(\alpha)} = \begin{cases} +\mu^{(\alpha)}\mathbf{E} & \text{als} \quad q^{(\alpha)} > 0, \\ -\mu^{(\alpha)}\mathbf{E} & \text{als} \quad q^{(\alpha)} < 0, \end{cases} \tag{14.11}$$

waarin

$\mu^{(\alpha)}$ = beweeglijkheid van de deeltjes van de soort α .

Uit (14.9), (14.10) en (14.11) volgt

$$\sigma = \sum_{\alpha} N^{(\alpha)} |q^{(\alpha)}| \mu^{(\alpha)}. \tag{14.12}$$

(c) *De differentiaalvergelijking voor de elektrische potentiaal*

Substitutie van (14.8) in (14.9) en van de resulterende vergelijking in (14.2) leidt tot de volgende partiële differentiaalvergelijking voor de elektrische potentiaal

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{\mathbf{grad}} V) = 0. \tag{14.13}$$

In een gebied waar het medium homogeen is, dus $\sigma =$ constante, gaat (14.13) over in

$$\operatorname{div} \operatorname{\mathbf{grad}} V = 0 \qquad \text{of} \quad \nabla^2 V = 0, \tag{14.14}$$

waarin

$$\nabla^2 \overset{\text{def}}{=\!=} \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{14.15}$$

de operator van LAPLACE heet. Vergelijking (14.14) staat bekend als de vergelijking van LAPLACE.

(d) *Randvoorwaarden aan een oppervlak waar de soortelijke geleiding een sprong vertoont*

Indien in de configuratie oppervlakken aanwezig zijn waar de soortelijke geleiding een eindige sprong vertoont, zijn ter plaatse van zo'n oppervlak de grootheden **J**, **E** en V niet meer continu differentieerbaar en moeten de differentiaalvergelijkingen (14.2), (14.4) en (14.13) worden aangevuld met randvoorwaarden (zie Par. 11). Met behulp van de in Par. 11 gevolgde methode kan uit (14.1) worden afgeleid (zie ook Fig. 15 en (11.16))

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_1 \quad \text{op } \Sigma \tag{14.16}$$

en uit (14.3) (zie ook Fig. 14 en (11.8))

$$\mathbf{v}\times\mathbf{E}_2 = \mathbf{v}\times\mathbf{E}_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{14.17}$$

Verder is met behulp van de in Par. 13 gevolgde methode uit (14.5) af te leiden (zie ook Fig. 21 en (13.26))

$$V_2 = V_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{14.18}$$

Opgemerkt wordt, dat door (14.18) via (14.8) automatisch aan (14.17) wordt voldaan en dat substitutie van (14.8) in (14.9) en van de resulterende vergelijking in (14.16) leidt tot

$$\sigma_2\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\ V_2 = \sigma_1\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\ V_1 \quad \text{op } \Sigma. \tag{14.19}$$

De vergelijkingen (14.18) en (14.19) geven de randvoorwaarden bij doorgang door Σ, uitgedrukt in de elektrische potentiaal en zijn richtingsafgeleide langs de normaal $\mathbf{v}$ op Σ.

(e) *Randvoorwaarden op het randoppervlak van de configuratie*

Wat de randvoorwaarden op het randoppervlak $\mathscr{S}$ van de configuratie betreft, moeten wij onderscheid maken tussen het geïsoleerde deel van het randoppervlak, d.w.z. $\mathscr{S} - \sum_{n=0}^{N} \mathscr{S}_n$, en de elektroden $\mathscr{S}_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, N$). Op het geïsoleerde deel van het randoppervlak geldt

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad \text{op } \mathscr{S} - (\mathscr{S}_0 + \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 + \ldots + \mathscr{S}_N). \tag{14.20}$$

Door de elektroden wordt in het algemeen elektrische stroom aan de configuratie toegevoerd of uit de configuratie afgevoerd. De door elektrode $\mathscr{S}_n$ aan de configuratie toegevoerde stroom is gegeven door

(let op de richting van **n** in Fig. 22)

$$I_n = \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}A \qquad \text{met} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{14.21}$$

Substitutie van (14.20) en (14.21) in (14.1) leidt tot de betrekking

$$\sum_{n=0}^{N} I_n = 0 \qquad \text{(wet van KIRCHHOFF)}, \tag{14.22}$$

of in het bijzonder

$$I_0 = -\sum_{n=1}^{N} I_n. \tag{14.23}$$

De elektroden hebben wij elektrisch volkomen geleidend ondersteld. Dit betekent (zie (11.17)), dat $\mathbf{n}\times\mathbf{E}\to\mathbf{0}$ bij nadering van $\mathscr{S}_n$ via $\mathscr{V}$, met $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Op grond van (14.5) brengt deze voorwaarde met zich mee, dat de elektrische potentiaal op een elektrode een constante waarde heeft. Wij stellen

$$V = U_n \quad \text{op } \mathscr{S}_n \qquad \text{met } n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{14.24}$$

Op het geïsoleerde deel van het randoppervlak blijft de elektrische potentiaal ongespecificeerd.

(f) *Gegeneraliseerde stelling van* TELLEGEN

Als eerste eigenschap van de in Fig. 22 weergegeven configuratie zullen wij een generalisatie van de stelling van TELLEGEN uit de theorie van de elektrische netwerken afleiden. Voor de laatstgenoemde stelling verwijzen wij naar PENFIELD, SPENCE and DUINKER[19].

De bedoelde generalisatie heeft te maken met twee van elkaar onafhankelijke velden die kunnen optreden in meetkundig dezelfde configuratie. Het ene veld is een mogelijk elektrisch veld in de configuratie; dit duiden wij aan met $\{\mathbf{E}, V\} = \{\mathbf{E}^{\mathrm{A}}, V^{\mathrm{A}}\}$. Het is in $\mathscr{V}$ gedefinieerd en voldoet aan de eigenschap

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}^{\mathrm{A}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathscr{V}, \tag{14.25}$$

zodat wij kunnen stellen

$$\mathbf{E}^{\mathrm{A}} = -\mathbf{grad}\,V^{\mathrm{A}} \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.26}$$

19. PENFIELD, P., R. SPENCE and S. DUINKER, *Tellegen's theorem and electrical networks*. Cambridge (Mass.), The M.I.T. Press, 1970.

Verder voldoet V^A aan de voorwaarde, dat V^A een constante waarde heeft op $\mathscr{S}_n$ met $n = 0, 1, 2, \ldots, N$; wij stellen

$$V^A = U_n^A \quad \text{op} \quad \mathscr{S}_n \qquad \text{met} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{14.27}$$

Het tweede veld is een mogelijke elektrische stroomdichtheid in de configuratie; dit veld duiden wij aan met $\mathbf{J} = \mathbf{J}^B$. Het is in $\mathscr{V}$ gedefinieerd en voldoet aan de eigenschap

$$\operatorname{div} \mathbf{J}^B = 0 \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.28}$$

Verder voldoet $\mathbf{J}^B$ aan de voorwaarde, dat

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^B = 0 \qquad \text{op} \qquad \mathscr{S} - (\mathscr{S}_0 + \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 + \ldots + \mathscr{S}_N). \tag{14.29}$$

Tevens worden ingevoerd de grootheden

$$I_n^B = \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^B \, \mathrm{d}A, \tag{14.30}$$

die op grond van (14.1) en (14.29) moeten voldoen aan de voorwaarde

$$\sum_{n=0}^{N} I_n^B = 0, \tag{14.31}$$

zodat in het bijzonder

$$I_0^B = -\sum_{n=1}^{N} I_n^B. \tag{14.32}$$

Beschouw nu de in $\mathscr{V}$ gedefinieerde uitdrukking $\mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B$. Op grond van (14.26) is hiervoor te schrijven

$$\mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B = -(\mathbf{grad}\, V^A) \cdot \mathbf{J}^B. \tag{14.33}$$

Nu is echter

$$-(\mathbf{grad}\, V^A) \cdot \mathbf{J}^B = -\operatorname{div}(V^A \mathbf{J}^B) + V^A \operatorname{div} \mathbf{J}^B. \tag{14.34}$$

Op grond van (14.28) is de laatste term in het rechterlid gelijk aan nul, zodat uit (14.33) en (14.34) volgt

$$\mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B = -\operatorname{div}(V^A \mathbf{J}^B) \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.35}$$

Integreren van deze uitdrukking over $\mathscr{V}$ geeft

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}^A \cdot \mathbf{J}^B \, \mathrm{d}V = -\iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}(V^A \mathbf{J}^B) \, \mathrm{d}V. \tag{14.36}$$

Op het rechterlid wordt de divergentiestelling van GAUSS (zie (B. 39)) toegepast (let hierbij op de richting van $\mathbf{n}$ in Fig. 22) en worden in de

integraal over $\mathscr{S}$ de randvoorwaarden (14.27), (14.29) en (14.30) in rekening gebracht. Hiermee wordt

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(V^{\mathrm{A}}\mathbf{J}^{\mathrm{B}})\,\mathrm{d}A = \sum_{n=0}^{N} U_n^{\mathrm{A}} \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}A = \sum_{n=0}^{N} U_n^{\mathrm{A}} I_n^{\mathrm{B}}, \tag{14.37}$$

hetgeen met gebruikmaking van (14.32) kan worden geschreven als

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(V^{\mathrm{A}}\mathbf{J}^{\mathrm{B}})\,\mathrm{d}A = \sum_{n=1}^{N} (U_n^{\mathrm{A}} - U_0^{\mathrm{A}})\, I_n^{\mathrm{B}}. \tag{14.38}$$

Uit (14.36) en (14.38) wordt tenslotte verkregen

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}^{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}V = \sum_{n=1}^{N} (U_n^{\mathrm{A}} - U_0^{\mathrm{A}})\, I_n^{\mathrm{B}}. \tag{14.39}$$

Vergelijking (14.39) kan worden beschouwd als een generalisatie van de stelling van TELLEGEN, waarbij het linkerlid de bijdrage van het niet-discrete deel $\mathscr{V}$ van het totale „elektrische netwerk" in rekening brengt. Opgemerkt wordt, dat in de afleiding van (14.39) nergens gebruik is gemaakt van de constitutieve vergelijkingen van het in $\mathscr{V}$ aanwezige medium, daar de velden $\{\mathbf{E}^{\mathrm{A}}, V^{\mathrm{A}}\}$ en $\mathbf{J}^{\mathrm{B}}$ nergens met elkaar in verband worden gebracht. Dit houdt in, dat (14.39) ook geldig is voor niet-lineaire en/of anisotrope materialen.

(g) *Toegevoerd elektromagnetisch vermogen en ontwikkelde hoeveelheid warmte*

Het aan de configuratie toegevoerde elektromagnetische vermogen is gegeven door (zie (12.18))

$$P_{\text{source}} = \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A. \tag{14.40}$$

Rekening houdend met de eigenschap, dat $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ continu is bij doorgang door een oppervlak waar de soortelijke geleiding een sprong maakt (zie Vraagstuk 11.3), leidt toepassing van de divergentiestelling van GAUSS (zie (B. 39)) op het rechterlid tot (let hierbij op de richting van $\mathbf{n}$ in Fig. 22)

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}A = -\iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,\mathrm{d}V. \tag{14.41}$$

Nu is echter

$$-\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}, \tag{14.42}$$

daar **rot** $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ op grond van (14.4) en **rot** $\mathbf{H} = \mathbf{J}$ op grond van (9.8). Uit (14.40), (14.41) en (14.42) volgt

$$P_{\text{source}} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V. \tag{14.43}$$

Met behulp van (14.39), waarin wij $\{\mathbf{E}^{\mathrm{A}}, V^{\mathrm{A}}\} = \{\mathbf{E}, V\}$ en $\mathbf{J}^{\mathrm{B}} = \mathbf{J}$ stellen, is voor het rechterlid te schrijven

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V = \sum_{n=1}^{N} (U_n - U_0)\, I_n, \tag{14.44}$$

zodat

$$P_{\text{source}} = \sum_{n=1}^{N} (U_n - U_0)\, I_n. \tag{14.45}$$

Opgemerkt wordt, dat ook dit resultaat — evenals (14.39) — geldig is voor niet-lineaire en/of anisotrope media.

Het aan de configuratie toegevoerde elektromagnetische vermogen wordt omgezet in warmte. Laat $(\partial_t w_{\mathrm{h}})_{\text{gen}}$ de ruimtelijke dichtheid zijn van het tempo waarin in $\mathscr{V}$ warmte wordt ontwikkeld en $(\partial_t Q)_{\text{gen}}$ het tempo van de totale warmteontwikkeling, dan geldt (zie (13.5))

$$(\partial_t Q)_{\text{gen}} = \iiint_{\mathscr{V}} (\partial_t w_{\mathrm{h}})_{\text{gen}}\,\mathrm{d}V. \tag{14.46}$$

De wet van behoud van energie eist

$$P_{\text{source}} = (\partial_t Q)_{\text{gen}}. \tag{14.47}$$

Substitutie van (14.43) en (14.46) in (14.47) leidt tot

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = (\partial_t w_{\mathrm{h}})_{\text{gen}}. \tag{14.48}$$

Ook voor de afleiding van dit resultaat is geen gebruik gemaakt van de constitutieve vergelijkingen van het medium dat zich in $\mathscr{V}$ bevindt. Door van (14.9) gebruik te maken, is (14.48) verder te herleiden tot

$$(\partial_t w_{\mathrm{h}})_{\text{gen}} = \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \sigma^{-1}\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}. \tag{14.49}$$

Daar voor een dissipatief medium ($\sigma > 0$) het rechterlid een niet-negatieve functie van de plaatscoördinaten in $\mathscr{V}$ is, geldt $(\partial_t Q)_{\text{gen}} > 0$ als $\mathbf{E} \not\equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}$ (en dus tevens $\mathbf{J} \not\equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}$).

(h) *Eenduidigheidsstelling*

De eenduidigheidsstelling geeft aan welke gegevens noodzakelijk en voldoende zijn om de veldgrootheden **J**, **E** en V in de configuratie

ondubbelzinnig te bepalen. Een deel van deze gegevens heeft betrekking op het door de configuratie ingenomen gebied $\mathscr{V}$ en het daarin aanwezige medium, een ander deel van de gegevens heeft betrekking op het randoppervlak $\mathscr{S}$ van de configuratie. Wat de gegevens in het gebied $\mathscr{V}$ betreft, wordt voorgeschreven dat $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ en V aan de differentiaalvergelijkingen (14.2), (14.4) en (14.6) en aan de constitutieve vergelijking (14.9) voldoen. Verder wordt voorgeschreven, dat op eventueel aanwezige oppervlakken waar de soortelijke geleiding een eindige sprong vertoont, aan de randvoorwaarden (14.16), (14.17) en (14.18) is voldaan. Op het randoppervlak $\mathscr{S}$ wordt voorgeschreven, dat op de elektrode $\mathscr{S}_n$ òf de elektrische potentiaal U_n òf de via deze elektrode aan de configuratie toegevoerde elektrische stroom I_n een voorgeschreven waarde heeft voor $n = 1, 2, \ldots, N$, terwijl wij op de elektrode $\mathscr{S}_0$ de elektrische potentiaal U_0 voorschrijven; op het overblijvende deel wordt de randvoorwaarde (14.20) voorgeschreven. Wij zullen nu bewijzen, dat al deze gegevens de grootheden $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ en V in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$ ondubbelzinnig bepalen. Aan de elektrode $\mathscr{S}_0$ is een aparte rol toebedeeld, enerzijds om de elektrische potentiaal in de configuratie absoluut te kunnen vastleggen en anderzijds om via (14.23) aan (14.22) te kunnen voldoen. Het bewijs wordt door tegenspraak geleverd.

Onderstel, dat er ten minste twee niet-identieke veldconfiguraties $\{\mathbf{J}', \mathbf{E}', V'\}$ en $\{\mathbf{J}'', \mathbf{E}'', V''\}$ bestaan, die aan dezelfde rij van voorwaarden in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$ voldoen, en probeer te bewijzen, dat het verschil van twee overeenkomstige veldgrootheden identiek gelijk aan nul is. Noem deze verschilvelden achtereenvolgens

$$\mathbf{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}' - \mathbf{J}'', \qquad \mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}' - \mathbf{E}'', \qquad V \stackrel{\text{def}}{=} V' - V''. \tag{14.50}$$

Daar zowel $\{\mathbf{J}', \mathbf{E}', V'\}$ als $\{\mathbf{J}'', \mathbf{E}'', V''\}$ aan de differentiaalvergelijkingen (14.2), (14.4) en (14.6) voldoen, is

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div}(\mathbf{J}' - \mathbf{J}'') = \operatorname{div} \mathbf{J}' - \operatorname{div} \mathbf{J}'' = 0, \tag{14.51}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{rot}(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \mathbf{rot}\, \mathbf{E}' - \mathbf{rot}\, \mathbf{E}'' = \mathbf{0}, \tag{14.52}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{E}'' = -\mathbf{grad}\, V' + \mathbf{grad}\, V'' = -\mathbf{grad}(V' - V'') = -\mathbf{grad}\, V. \tag{14.53}$$

Uit de constitutieve vergelijking (14.9), tezamen met (14.50) volgt verder

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' - \mathbf{J}'' = \sigma\mathbf{E}' - \sigma\mathbf{E}'' = \sigma(\mathbf{E}' - \mathbf{E}'') = \sigma\mathbf{E}. \tag{14.54}$$

Als verder op elektrode $\mathscr{S}_n$ de elektrische potentiaal een voorgeschreven waarde U_n heeft (hetgeen het geval kan zijn voor $n = 0, 1, 2, \ldots, N$), geldt

$$V = V' - V'' = U_n - U_n = 0 \quad \text{op } \mathscr{S}_n; \tag{14.55}$$

als daarentegen de via elektrode $\mathscr{S}_n$ aan de configuratie toegevoerde stroom een voorgeschreven waarde I_n heeft (hetgeen het geval kan zijn voor $n = 1, 2, \ldots, N$), geldt

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}A &= \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot(\mathbf{J}'-\mathbf{J}'')\,\mathrm{d}A \\ &= \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}'\,\mathrm{d}A - \iint_{\mathscr{S}_n} \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}''\,\mathrm{d}A \\ &= I_n - I_n = 0. \end{aligned} \tag{14.56}$$

Op grond van (14.51), (14.52) en (14.53) kunnen wij nu (14.39) toepassen met $\mathbf{E}^{\mathrm{A}} = \mathbf{E}$, $V^{\mathrm{A}} = V$ en $\mathbf{J}^{\mathrm{B}} = \mathbf{J}$, waarbij het rechterlid op grond van (14.55) en (14.56) gelijk is aan nul. Derhalve geldt

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V = 0. \tag{14.57}$$

Substitutie van (14.54) in (14.57) geeft

$$\iiint_{\mathscr{V}} \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = 0, \tag{14.58}$$

waarin $\sigma > 0$ overal in $\mathscr{V}$. Verder is $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 > 0$ als $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, zodat

$$\iiint_{\mathscr{V}} \sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V > 0 \quad \text{als} \quad \mathbf{E} \not\equiv \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathscr{V}. \tag{14.59}$$

De enige mogelijkheid om aan (14.58) te voldoen, is dus $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}$ en hiermee wordt $\mathbf{J} \equiv \mathbf{0}$ in $\mathscr{V}$ en $V \equiv$ constante in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$. Op het deel $\mathscr{S}_0$ van $\mathscr{S}$ geldt echter $V = 0$, zodat ook $V \equiv 0$ in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$. Op grond van (14.50) wordt hiermee

$$\mathbf{J}' \equiv \mathbf{J}'', \qquad \mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}'' \qquad \text{en} \qquad V' \equiv V'' \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.60}$$

Het resultaat (14.60) is in strijd met het uitgangspunt, zodat er slechts één veldconfiguratie bestaat die aan de gestelde rij van voorwaarden in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$ voldoet. Merk op, dat het hier gegeven bewijs alleen van toepassing is op lineaire media.

Opmerking. Uit de randvoorwaarden kunnen wij ook de voorgeschreven waarde U_0 van de elektrische potentiaal op $\mathscr{S}_0$ weglaten en dan op $\mathscr{S}_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ de elektrische potentiaalverschillen (= elektrische spanningen) $U_n - U_0$ ten opzichte van $\mathscr{S}_0$ voorschrijven. In dit geval gaat

(14.55) over in $V=(U'_n-U'_0)+U'_0-(U''_n-U''_0)-U''_0=U'_0-U''_0$ op $\mathscr{S}_n$ voor $n=1, 2, \ldots, N$. Deze betrekking geldt echter ook op $\mathscr{S}_0$, zodat toepassing van (14.39) wederom tot (14.57) leidt. De hieruit volgende conclusie $V\equiv$ constante in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$ leidt dan tot $V\equiv U'_0-U''_0$ in $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$, zodat in dit geval de elektrische potentiaal in de configuratie op een additieve constante na bepaald is.

(i) *Superpositiestelling*

De superpositiestelling heeft te maken met het lineair combineren van in de configuratie mogelijk optredende veldgrootheden. Laat $\{\mathbf{J}^A, \mathbf{E}^A, V^A\}$ een in het gebied $\mathscr{V}$ gedefinieerd veld zijn dat volgens de voorwaarden van de eenduidigheidsstelling correspondeert met de elektrische potentialen $\{U_n^A\}$ op, dan wel met de stromen $\{I_n^A\}$ door de elektroden $\{\mathscr{S}_n\}$. Laat evenzo $\{\mathbf{J}^B, \mathbf{E}^B, V^B\}$ een in het gebied $\mathscr{V}$ gedefinieerd veld zijn dat volgens de voorwaarden van de eenduidigheidsstelling correspondeert met de elektrische potentialen $\{U_n^B\}$ op, dan wel met de stromen $\{I_n^B\}$ door de elektroden $\{\mathscr{S}_n\}$. Volgens de superpositiestelling is dan

$$\{\mathbf{J}, \mathbf{E}, V\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\alpha\mathbf{J}^A+\beta\mathbf{J}^B, \alpha\mathbf{E}^A+\beta\mathbf{E}^B, \alpha V^A+\beta V^B\} \tag{14.61}$$

het in $\mathscr{V}$ gedefinieerde veld dat correspondeert met de elektrische potentialen $\{U_n\}=\{\alpha U_n^A+\beta U_n^B\}$ op, dan wel met de stromen $\{I_n\}=\{\alpha I_n^A+\beta I_n^B\}$ door de elektroden $\{\mathscr{S}_n\}$, waarin α en β willekeurige reële constanten aanduiden; deze correspondentie is ondubbelzinnig.

Het bewijs volgt door op te merken, dat $\mathbf{J}$ aan (14.2) voldoet, omdat $\mathbf{J}^A$ en $\mathbf{J}^B$ aan (14.2) voldoen en dat $\mathbf{E}$ aan (14.4) voldoet, omdat $\mathbf{E}^A$ en $\mathbf{E}^B$ aan (14.4) voldoen. Verder staat V via (14.8) met $\mathbf{E}$ in verband, omdat V^A via (14.8) met $\mathbf{E}^A$ en V^B via (14.8) met $\mathbf{E}^B$ in verband staat. Tevens staat $\mathbf{J}$ via (14.9) met $\mathbf{E}$ in verband, omdat $\mathbf{J}^A$ via (14.9) met $\mathbf{E}^A$ en $\mathbf{J}^B$ via (14.9) met $\mathbf{E}^B$ in verband staat. Op het geïsoleerde deel van het randoppervlak $\mathscr{S}$ voldoet $\mathbf{J}$ aan (14.20), omdat $\mathbf{J}^A$ en $\mathbf{J}^B$ hieraan voldoen, terwijl op de elektroden aan de betrekkingen (14.21) en (14.24) voor $\mathbf{J}$, resp. V wordt voldaan, omdat aan deze betrekkingen voor $\mathbf{J}^A$, resp. V^A en voor $\mathbf{J}^B$, resp. V^B wordt voldaan. Wat het veld $\{\mathbf{J}, \mathbf{E}, V\}$ betreft, is dus aan alle voorwaarden van de eenduidigheidsstelling voldaan. Op grond van deze stelling is dan ook de correspondentie tussen $\{\mathbf{J}, \mathbf{E}, V\}$ enerzijds en $\{U_n\}$ en $\{I_n\}$ anderzijds ondubbelzinnig.

Opmerking. Indien uit de randvoorwaarden de voorgeschreven waarde van de elektrische potentiaal op $\mathscr{S}_0$ wordt weggelaten en de elektrische potentiaalverschillen (elektrische spanningen) van $\mathscr{S}_n$ voor $n=1, 2, \ldots, N$

ten opzichte van $\mathscr{S}_0$ worden voorgeschreven, treden in de superpositiestelling de elektrische potentiaalverschillen $\{U_n^A - U_0^A\}$, resp. $\{U_n^B - U_0^B\}$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ op. Wat de elektrische potentiaal betreft, geldt dan in $\mathscr{V}$ de superpositiestelling voor $V^A - U_0^A$, resp. $V^B - U_0^B$, waarin U_0^A en U_0^B ongespecificeerde constanten zijn.

(j) *Conductantiematrix en weerstandsmatrix*

Bij toepassing in een elektronische schakeling is het gewenst de eigenschappen van de configuratie te karakteriseren door middel van grootheden die direct voor meting aan de elektroden toegankelijk zijn. Via de elektroden is immers de beschouwde configuratie aangesloten aan de rest van de schakeling. Nu zijn zowel de elektrische potentiaalverschillen (elektrische spanningen) $U_n - U_0$ tussen de elektroden $\mathscr{S}_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ en de elektrode $\mathscr{S}_0$, als de via de elektroden aan de configuratie toegevoerde stromen I_n voor $n = 1, 2, \ldots, N$ en $I_0 = -\sum_{n=1}^{N} I_n$ eenvoudig voor meting toegankelijk. Op grond van de eenduidigheidsstelling mag voor ieder van de elektroden $\mathscr{S}_n$ echter slechts òf $U_n - U_0$ òf I_n worden voorgeschreven; de niet-voorgeschreven grootheden zijn dan door de wel-voorgeschreven grootheden ondubbelzinnig bepaald. Bovendien volgt uit de superpositiestelling, dat er tussen de niet- en de wel-voorgeschreven grootheden een homogeen lineair verband bestaat.

In de eerste plaats beschouwen wij het geval, dat alle elektrische potentiaalverschillen tussen de elektroden $\mathscr{S}_n$ en de elektrode $\mathscr{S}_0$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ zijn voorgeschreven. Het homogene, lineaire verband dat er tussen de grootheden $\{U_n - U_0\}$ en de via de elektroden $\mathscr{S}_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ aan de configuratie toegevoerde stromen $\{I_n\}$ bestaat, is dan van de vorm

$$I_p = \sum_{q=1}^{N} G_{p,q}(U_q - U_0) \qquad \text{voor } p = 1, 2, \ldots, N, \tag{14.62}$$

terwijl

$$I_0 = -\sum_{p=1}^{N} I_p. \tag{14.63}$$

De coëfficiënten $G_{p,q}$ in (14.62) vormen de *conductantiematrix* $[G]$ van de configuratie:

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{1,1} & \ldots & G_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{N,1} & \ldots & G_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{14.64}$$

Het element $G_{p,q}$ van $[G]$ is de waarde die de via elektrode $\mathscr{S}_p$ aan de configuratie toegevoerde stroom heeft, ingeval het elektrische potentiaalverschil tussen elektrode $\mathscr{S}_q$ en elektrode $\mathscr{S}_0$ de waarde 1 heeft, terwijl de elektrische potentiaalverschillen tussen alle overige elektroden en elektrode $\mathscr{S}_0$ de waarde 0 hebben.

In de tweede plaats beschouwen wij het geval, dat alle via de elektroden $\mathscr{S}_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ aan de configuratie toegevoerde stromen zijn voorgeschreven. Het homogene, lineaire verband dat er tussen de grootheden $\{I_n\}$ en de elektrische potentiaalverschillen $\{U_n - U_0\}$ tussen de elektroden $\mathscr{S}_n$ voor $n = 1, 2, \ldots, N$ en de elektrode $\mathscr{S}_0$ bestaat, is dan van de vorm

$$U_p - U_0 = \sum_{q=1}^{N} R_{p,q} I_q, \tag{14.65}$$

terwijl

$$I_0 = -\sum_{q=1}^{N} I_q. \tag{14.66}$$

De coëfficiënten $R_{p,q}$ in (14.65) vormen de *weerstandsmatrix* $[R]$ van de configuratie:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{1,1} & \cdots & R_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ R_{N,1} & \cdots & R_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{14.67}$$

Het element $R_{p,q}$ van $[R]$ is de waarde die het elektrische potentiaalverschil tussen de elektrode $\mathscr{S}_p$ en de elektrode $\mathscr{S}_0$ heeft, ingeval de via elektrode $\mathscr{S}_q$ aan de configuratie toegevoerde stroom de waarde 1 heeft, terwijl via geen van de overige elektroden stroom aan de configuratie wordt toegevoerd of afgevoerd (met uitzondering van $\mathscr{S}_0$, via welke elektrode op grond van (14.66) weer een stroom met de waarde 1 wordt afgevoerd).

Uit (14.62) en (14.65) volgt, dat $[G]$ en $[R]$ elkaars inverse zijn:

$$\sum_{m=1}^{N} G_{p,m} R_{m,q} = \delta_{p,q} \quad \text{en} \quad \sum_{m=1}^{N} R_{p,m} G_{m,q} = \delta_{p,q}$$
$$\text{voor} \quad p, q = 1, 2, \ldots, N, \tag{14.68}$$

waarin $\delta_{p,q} = 1$ als $p = q$ en $\delta_{p,q} = 0$ als $p \neq q$, of

$$[R] = [G]^{-1} \quad \text{en} \quad [G] = [R]^{-1}. \tag{14.69}$$

(k) *Reciprociteitsstelling*

Een reciprociteitsstelling legt een verband tussen de grootheden die in twee van elkaar verschillende „toestanden" in een configuratie kunnen optreden. In de ene toestand, die wij met „Toestand A" zullen aanduiden, noemen wij $\{\mathbf{J},\mathbf{E},V\}=\{\mathbf{J}^{\mathrm{A}},\mathbf{E}^{\mathrm{A}},V^{\mathrm{A}}\}$ in $\mathscr{V}$ en $\{U_n-U_0, I_n\}=\{U_n^{\mathrm{A}}-U_0^{\mathrm{A}}, I_n^{\mathrm{A}}\}$ op $\{\mathscr{S}_n\}$, waarin $\{\mathscr{S}_n\}$ de verzameling van de elektroden $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_N$ aanduidt, terwijl $\sigma=\sigma^{\mathrm{A}}(\mathbf{r})$ in $\mathscr{V}$. In de andere toestand, die wij met „Toestand B" zullen aanduiden, noemen wij $\{\mathbf{J},\mathbf{E},V\}=\{\mathbf{J}^{\mathrm{B}},\mathbf{E}^{\mathrm{B}},V^{\mathrm{B}}\}$ in $\mathscr{V}$ en $\{U_n-U_0, I_n\}=\{U_n^{\mathrm{B}}-U_0^{\mathrm{B}}, I_n^{\mathrm{B}}\}$ op $\{\mathscr{S}_n\}$, terwijl $\sigma=\sigma^{\mathrm{B}}(\mathbf{r})$ in $\mathscr{V}$. Voor een soortgelijk geval hebben wij reeds bewezen (zie (14.39)), dat

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}^{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}V=\sum_{n=1}^{N}(U_n^{\mathrm{A}}-U_0^{\mathrm{A}})\,I_n^{\mathrm{B}}. \tag{14.70}$$

Evenzo geldt

$$\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}^{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}V=\sum_{n=1}^{N}(U_n^{\mathrm{B}}-U_0^{\mathrm{B}})\,I_n^{\mathrm{A}}. \tag{14.71}$$

Op grond van de constitutieve vergelijkingen $\mathbf{J}^{\mathrm{A}}=\sigma^{\mathrm{A}}\mathbf{E}^{\mathrm{A}}$ en $\mathbf{J}^{\mathrm{B}}=\sigma^{\mathrm{B}}\mathbf{E}^{\mathrm{B}}$ geldt echter

$$\mathbf{E}^{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{B}}-\mathbf{E}^{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{A}}=(\sigma^{\mathrm{B}}-\sigma^{\mathrm{A}})\mathbf{E}^{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{E}^{\mathrm{B}} \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.72}$$

Toestand A en Toestand B worden nu in dezelfde configuratie aanwezig geacht, dan is $\sigma^{\mathrm{A}}=\sigma^{\mathrm{B}}$ en geldt

$$\mathbf{E}^{\mathrm{A}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{B}}=\mathbf{E}^{\mathrm{B}}\cdot\mathbf{J}^{\mathrm{A}} \quad \text{in } \mathscr{V}. \tag{14.73}$$

Uit (14.70), (14.71) en (14.73) volgt dan, dat

$$\sum_{n=1}^{N}(U_n^{\mathrm{A}}-U_0^{\mathrm{A}})\,I_n^{\mathrm{B}}=\sum_{n=1}^{N}(U_n^{\mathrm{B}}-U_0^{\mathrm{B}})\,I_n^{\mathrm{A}}. \tag{14.74}$$

Deze betrekking staat bekend als de *reciprociteitsstelling* voor de beschouwde configuratie; zij geldt onafhankelijk van de waarden die de erin voorkomende grootheden op de elektroden hebben. Opgemerkt wordt, dat bij de afleiding van de reciprociteitsstelling gebruik is gemaakt van de lineariteit van de constitutieve vergelijkingen in $\mathscr{V}$.

In de eerste plaats wordt (14.74) gebruikt om een eigenschap van de conductantiematrix af te leiden. Daar Toestand A en Toestand B in dezelfde configuratie optreden, geldt op grond van de eenduidigheids-

stelling $[G^A] = [G^B] = [G]$. Substitutie van (14.62) in (14.74) geeft, bij vervanging van de sommatie-index n door p,

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} G_{p,q}(U_p^A - U_0^A)(U_q^B - U_0^B) = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} G_{p,q}(U_p^B - U_0^B)(U_q^A - U_0^A). \tag{14.75}$$

Daar (14.75) moet gelden voor willekeurige waarden van $U_p^A - U_0^A$ en $U_q^B - U_0^B$, volgt

$$G_{p,q} = G_{q,p} \qquad \text{voor } p,q = 1, 2, \ldots, N, \tag{14.76}$$

hetgeen betekent, dat de conductantiematrix een symmetrische matrix is.

In de tweede plaats wordt (14.74) gebruikt om een eigenschap van de weerstandsmatrix af te leiden. Daar Toestand A en Toestand B in dezelfde configuratie optreden, geldt op grond van de eenduidigheidsstelling $[R^A] = [R^B] = [R]$. Substitutie van (14.65) in (14.74) geeft, bij vervanging van de sommatie-index n door p,

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} R_{p,q} I_q^A I_p^B = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} R_{p,q} I_q^B I_p^A. \tag{14.77}$$

Daar (14.77) moet gelden voor willekeurige waarden van I_p^A en I_q^B, volgt

$$R_{p,q} = R_{q,p} \qquad \text{voor } p,q = 1, 2, \ldots, N, \tag{14.78}$$

hetgeen betekent, dat de weerstandsmatrix een symmetrische matrix is.

(l) *Berekening van het veldpatroon in de configuratie*

Het berekenen van de verdeling van **J**, **E** en V in de in Fig. 22 weergegeven configuratie kan in de meeste gevallen slechts langs numerieke weg geschieden. Daarbij wordt het gebied $\mathscr{V}$ door een kubisch rooster van netpunten overdekt en wordt in de eerste plaats de elektrische potentiaal V in de netpunten berekend als oplossing van een differentievergelijking die voldoende nauwkeurig met de differentiaalvergelijking (14.13) voor de elektrische potentiaal overeenkomt, met inachtneming van de randvoorwaarden die op $\mathscr{S}$ gelden, waarin eventuele afgeleiden door passende differenties zijn vervangen. Daarna worden uit de verkregen waarden van V in de netpunten de waarden van **E** en **J** in de netpunten berekend. Voor de behandeling van deze rekenschema's verwijzen wij naar BINNS and LAWRENSON[20].

20. BINNS, K.J. and P.J. LAWRENSON, *Analysis and computation of electric and magnetic field problems*, 2nd. ed., Oxford, Pergamon Press, 1973.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 14.1. In een materiaal vindt transport van ladingdragers met lading q en concentratie N plaats onder invloed van een statisch elektrisch veld $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V$, waarin V de elektrostatische potentiaal van $\mathbf{E}$ voorstelt, en onder invloed van diffusie. Voor de driftstroomdichtheid $\mathbf{J}_{\text{drift}}$ geldt $\mathbf{J}_{\text{drift}} = N|q|\mu\mathbf{E}$, waarin μ de beweeglijkheid van de ladingdragers voorstelt; voor de diffusiestroomdichtheid $\mathbf{J}_{\text{diff}}$ geldt $\mathbf{J}_{\text{diff}} = -qD\,\mathbf{grad}\, N$, waarin D de diffusiecoëfficiënt van de ladingdragers voorstelt. Beschouw het geval, dat in ieder punt van het materiaal de diffusiestroom door de driftstroom wordt gecompenseerd, dus $\mathbf{J}_{\text{diff}} + \mathbf{J}_{\text{drift}} = \mathbf{0}$. (a) Bepaal het verband tussen N en V in de onderstelling, dat $\mu/D =$ constante. (b) Herleid het antwoord, als $\mu/D = |q|/kT$, waarin k de constante van BOLTZMANN en T de (thermodynamische of absolute) temperatuur voorstelt (betrekking van EINSTEIN).
Antwoord: (a) $N = N_0 \exp[-(|q|\mu/qD)(V - V_0)]$, waarin $N = N_0$ in het referentiepunt waar $V = V_0$; (b) $N = N_0 \exp[-q(V - V_0)/kT]$.

Vraagstuk 14.2. In de configuratie die in Fig. 22 is weergegeven, is in het algemeen een tijdonafhankelijke ruimtelading aanwezig. Bewijs, dat de ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho = \rho(\mathbf{r})$ is gegeven door $\rho = \mathbf{J}\cdot\mathbf{grad}(\varepsilon/\sigma)$, waarin $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ de permittiviteit van het materiaal voorstelt. (Merk op, dat $\rho = 0$ indien $\varepsilon/\sigma =$ constante in $\mathscr{V}$).

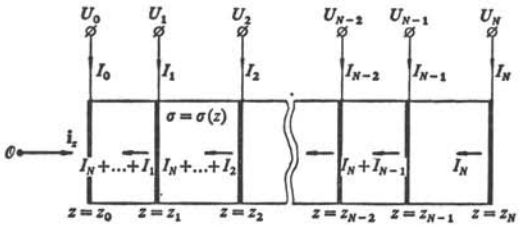
Vraagstuk 14.3. Op een oppervlak Σ waar de soortelijke geleiding in de in Fig. 22 weergegeven configuratie een eindige sprong maakt, is in het algemeen een tijdonafhankelijke oppervlaktelading aanwezig. Bewijs, dat de oppervlakteladingsdichtheid ρ_S is gegeven door $\rho_S = (\varepsilon_2/\sigma_2 - \varepsilon_1/\sigma_1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{J}$, waarin $\mathbf{v}\cdot\mathbf{J} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{J}_2$ en $\mathbf{v}$ de eenheidsvector langs de normaal op Σ voorstelt, wijzende van Zijde 1 naar Zijde 2. (Merk op, dat $\rho_S = 0$ indien $\varepsilon_2/\sigma_2 = \varepsilon_1/\sigma_1$ langs Σ.)

Vraagstuk 14.4. In een half-oneindig, homogeen, isotroop, geleidend medium met soortelijke geleiding σ is een half-bolvormige elektrode met straal a aanwezig. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel in zodanig, dat het half-oneindige medium het gebied $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < \infty$ in beslag neemt en de elektrode het gebied $0 < x^2 + y^2 + z^2 < a^2$, $z > 0$. De elektrode bevindt zich op elektrische potentiaal U. Via de elektrode wordt een stroom I aan het medium toegevoerd, die via het oneindige, waar de elektrische potentiaal tot de constante waarde U_∞ nadert, weer wordt afgevoerd. Onder de „aardingsweerstand" van de elektrode verstaat men de grootheid $R \overset{\text{def}}{=\!=} (U - U_\infty)/I$. Bepaal (a) $\mathbf{J} = J_r\mathbf{i}_r$ voor $a < r < \infty$, uitgedrukt in I; (b) $\mathbf{E} = E_r\mathbf{i}_r$ voor $a < r < \infty$, uitgedrukt in I; (c) $V = V(r)$ voor $a < r < \infty$, uitgedrukt in I en U_∞; (d) $U = \lim_{r \downarrow a} V$; (e) $V = V(r)$ voor $a < r < \infty$, uitgedrukt in U en U_∞; (f) R. Hierin is $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.
Antwoord: (a) $J_r = I/2\pi r^2$; (b) $E_r = I/2\pi\sigma r^2$; (c) $V = I/2\pi\sigma r + U_\infty$; (d) $U = I/2\pi\sigma a + U_\infty$; (e) $V = (U - U_\infty)(a/r) + U_\infty$; (f) $R = (2\pi\sigma a)^{-1}$.

Vraagstuk 14.5. In een cilindrische staaf van elektrisch geleidend materiaal vindt eendimensionale, stationaire elektrische stroming plaats in de richting evenwijdig aan de as van de cilinder. Voer een Cartesiaans coördinatenstelsel x, y, z in, zodanig dat de z-as evenwijdig is aan de as van de staaf. De oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de staaf is A. Voor de soortelijke geleiding geldt $\sigma = \sigma(z)$. Ter plaatse $z = z_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N)$, met $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_N$, bevinden zich, over de gehele dwarsdoorsnede van de staaf, oneindig dunne, vlakke elektroden. De elektroden $z = z_0$ en $z = z_N$ begrenzen de staaf.

Het manteloppervlak van de cilinder is geïsoleerd. De elektrode $z = z_n$ bevindt zich op elektrische potentiaal U_n; via deze elektrode wordt een stroom I_n aan de configuratie toegevoerd ($I_0 = -\sum_{n=1}^{N} I_n$). Bepaal (a) $\mathbf{J} = J_z \mathbf{i}_z$ in de secties $z_{m-1} < z < z_m$ ($m = 1, 2, \ldots, N$), uitgedrukt in $\{I_n\}$; (b) $\mathbf{E} = E_z \mathbf{i}_z$ in de secties $z_{m-1} < z < z_m$ ($m = 1, 2, \ldots, N$), uitgedrukt in $\{I_n\}$; (c) $U_p = \lim_{z \downarrow z_p} V$, uitgedrukt in U_0 en $\{I_n\}$; (d) de elementen $R_{p,q}$ van de weerstandsmatrix $[R]$.

Antwoord: (a) $J_z = -A^{-1} \sum_{q=m}^{N} I_q$ voor $z_{m-1} < z < z_m$; (b) $E_z = -[\sigma(z) A]^{-1} \sum_{q=m}^{N} I_q$; (c) $U_p = \sum_{q=1}^{p} R_q I_q + \sum_{q=p+1}^{N} R_p I_q + U_0$, waarin $R_p \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1} \int_{z_0}^{z_p} [\sigma(\zeta)]^{-1} \mathrm{d}\zeta$ de weerstand is van het gedeelte van de configuratie dat is gelegen tussen de elektroden $z = z_0$ en $z = z_p$; (d) $R_{p,q} = R_q$ als $p \geq q$, $R_{p,q} = R_p$ als $p \leq q$.



Figuur bij Vraagstuk 14.5

Vraagstuk 14.6. Van de configuratie die in Fig. 22 is weergegeven, wordt het geval beschouwd, dat er drie elektroden aanwezig zijn, te weten $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_1$ en $\mathscr{S}_2$. Behalve de weerstandsmatrix $[R]$ van de configuratie worden ingevoerd de kettingmatrix $[K]$ en de hybriede matrix $[H]$. Deze zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{bmatrix} U_1 - U_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 - U_0 \\ -I_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U_1 - U_0 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} \\ H_{2,1} & H_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 - U_0 \end{bmatrix}.$$

Bepaal (a) de elementen van de kettingmatrix, uitgedrukt in de elementen van de weerstandsmatrix; (b) de elementen van de hybriede matrix, uitgedrukt in de elementen van de weerstandsmatrix.

Antwoord: (a) $K_{1,1} = R_{1,1}/R_{2,1}$, $K_{1,2} = (R_{1,1} R_{2,2} - R_{1,2} R_{2,1})/R_{2,1}$, $K_{2,1} = 1/R_{2,1}$, $K_{2,2} = R_{2,2}/R_{2,1}$; (b) $H_{1,1} = (R_{1,1} R_{2,2} - R_{1,2} R_{2,1})/R_{2,2}$, $H_{1,2} = R_{1,2}/R_{2,2}$, $H_{2,1} = -R_{2,1}/R_{2,2}$, $H_{2,2} = 1/R_{2,2}$.

Vraagstuk 14.7. In een gesloten, elektrisch geleidend lichaam loopt een stationaire stroom met stroomdichtheid $\mathbf{J}$. Het geleidende lichaam neemt een begrensd gebied $\mathscr{V}$ in de ruimte in beslag. Het randoppervlak $\mathscr{S}$ van $\mathscr{V}$ is volledig geïsoleerd. (Er zijn dus geen elektroden aanwezig.) Bewijs, dat $\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{J} \mathrm{d}V = \mathbf{0}$. (Aanwijzing: substitueer $\mathbf{E}^{\mathrm{A}} = \mathbf{a}$, waarin $\mathbf{a}$ een *willekeurige* constante vector is, en $\mathbf{J}^{\mathrm{B}} = \mathbf{J}$ in de gegeneraliseerde stelling van TELLEGEN en merk op, dat $\iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{E}^{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{J}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}V = 0$.)

15. Sinusvormig met de tijd veranderende elektromagnetische velden. De complexe rekenwijze

In de elektrotechniek wordt voor het analyseren en synthetiseren van elektromagnetische velden als functie van de tijd veelvuldig gebruik gemaakt van de methode van FOURIER. Als basisfuncties voor deze methode dienen de functies $\cos(\omega t)$ en $\sin(\omega t)$, waarin ω de *cirkelfrequentie* wordt genoemd. De *frequentie* f hangt met ω samen via de betrekking

$$\omega = 2\pi f. \tag{15.1}$$

Daar de cosinusfunctie en de sinusfunctie periodieke functies van hun argument zijn met periode 2π, zijn $\cos(\omega t)$ en $\sin(\omega t)$ als functie van t periodiek met de *periode* T, die wordt gegeven door

$$T = 2\pi/\omega = 1/f. \tag{15.2}$$

Door passende superpositie van bijdragen met verschillende (cirkel)frequenties kan een grote klasse van in de tijd periodieke (door equidistante, discrete superpositie) en in de tijd voorbijgaande (door continue superpositie) velden worden beschreven. De hierop gebaseerde analyse en synthese volgens FOURIER worden behandeld in Par. 16.

Hieraan voorafgaand zullen wij het gereedschap ontwikkelen om de enkelvoudig sinusvormige deelbijdragen wiskundig op passende wijze te beschrijven. Hiermee wordt dan tevens het geval dat de elektromagnetische velden sinusvormig met de tijd veranderen, afgehandeld.

Het meest geschikte gereedschap om met sinusvormig met de tijd veranderende grootheden te rekenen, is de zgn. *complexe rekenwijze.* Deze rekenwijze voegt aan iedere reële, sinusvormig met de tijd veranderende grootheid als functie van $\mathbf{r}$ en t een complexe voorstelling als functie van $\mathbf{r}$ toe, zodanig dat de desbetreffende reële grootheid wordt verkregen door het reële deel te nemen van het product van de eraan toegevoegde complexe voorstelling en de functie $\exp(j\omega t)$, waarin j de imaginaire eenheid voorstelt. Voor het aanduiden van de aan een reële grootheid toegevoegde complexe voorstelling gebruiken wij een $\hat{}$ boven

het desbetreffende symbool. Wij zullen de complexe rekenwijze toelichten aan de hand van een tweetal voorbeelden, waarbij achtereenvolgens een scalaire en een vectoriële grootheid worden beschouwd.

Als voorbeeld van een scalaire grootheid beschouwen wij een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderende ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r},t)$. Krachtens de definitie is hiervoor te schrijven

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_c(\mathbf{r})\cos(\omega t)+\rho_s(\mathbf{r})\sin(\omega t), \tag{15.3}$$

waarin $\rho_c = \rho(\mathbf{r},0)$ en $\rho_s = \rho(\mathbf{r},\pi/2\omega)$. Via de complexe rekenwijze is $\rho(\mathbf{r},t)$ ook gegeven door

$$\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\hat{\rho}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)]. \tag{15.4}$$

Uitschrijven van $\hat{\rho}$ in reëel en imaginair deel via

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}[\hat{\rho}(\mathbf{r})]+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}[\hat{\rho}(\mathbf{r})] \tag{15.5}$$

en van $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ in reëel en imaginair deel via

$$\exp(\mathrm{j}\omega t) = \cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t) \tag{15.6}$$

en substitueren van (15.5) en (15.6) in (15.4) leidt tot

$$\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\hat{\rho}(\mathbf{r})]\cos(\omega t)-\mathrm{Im}[\hat{\rho}(\mathbf{r})]\sin(\omega t). \tag{15.7}$$

Gelijkstellen van de rechterleden van (15.3) en (15.7) voor alle t geeft

$$\mathrm{Re}[\hat{\rho}(\mathbf{r})] = \rho_c(\mathbf{r}) \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Im}[\hat{\rho}(\mathbf{r})] = -\rho_s(\mathbf{r}), \tag{15.8}$$

zodat

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \rho_c(\mathbf{r})-\mathrm{j}\rho_s(\mathbf{r}). \tag{15.9}$$

Daar in de elektromagnetische veldvergelijkingen partiële afgeleiden van de veldgrootheden — zowel naar de plaatscoördinaten als naar de tijd — voorkomen, is het van belang om na te gaan, hoe de complexe voorstellingen van deze afgeleiden in verband staan met de complexe voorstelling van de veldgrootheid die gedifferentieerd wordt. In de eerste plaats onderzoeken wij de partiële afgeleide naar de tijd. Partieel differentiëren van linker- en rechterlid van (15.3) naar t geeft

$$\partial_t\rho(\mathbf{r},t) = -\omega\rho_c(\mathbf{r})\sin(\omega t)+\omega\rho_s(\mathbf{r})\cos(\omega t). \tag{15.10}$$

Met behulp van (15.9) en (15.6) is dit te schrijven als

$$\partial_t\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\hat{\rho}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)]. \tag{15.11}$$

Dit resultaat wordt ook verkregen, indien men linker- en rechterlid van (15.4) naar t differentieert en in het rechterlid de operaties ∂_t en Re ver-

wisselt. Uit (15.11) volgt, dat aan de partiële afgeleide naar t van een reële grootheid wordt toegevoegd $j\omega \times$ de overeenkomstige complexe voorstelling.

Vervolgens onderzoeken wij de partiële afgeleide naar één van de plaatscoördinaten, b.v. naar x. Partieel differentiëren van linker- en rechterlid van (15.3) naar x geeft

$$\partial_x \rho(\mathbf{r},t) = \{\partial_x \rho_c(\mathbf{r})\} \cos(\omega t) + \{\partial_x \rho_s(\mathbf{r})\} \sin(\omega t). \tag{15.12}$$

Met behulp van (15.9) en (15.6) is dit te schrijven als

$$\partial_x \rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\{\partial_x \hat{\rho}(\mathbf{r})\} \exp(j\omega t)]. \tag{15.13}$$

Dit resultaat wordt ook verkregen, indien men linker- en rechterlid van (15.4) naar x differentieert en in het rechterlid de operaties ∂_x en Re verwisselt. Uit (15.13) volgt, dat aan de partiële afgeleide naar één van de plaatscoördinaten van een reële grootheid wordt toegevoegd de desbetreffende partiële afgeleide van de overeenkomstige complexe voorstelling.

Als voorbeeld van een vectoriële grootheid beschouwen wij een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderende elektrische veldsterkte $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$. Krachtens de definitie is hiervoor te schrijven

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \cos(\omega t) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \sin(\omega t), \tag{15.14}$$

waarin $\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r},0)$ en $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r},\pi/2\omega)$. Via de complexe rekenwijze is $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ook gegeven door

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)]. \tag{15.15}$$

Uitschrijven van $\hat{\mathbf{E}}$ in reëel en imaginair deel via

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] + j\,\mathrm{Im}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \tag{15.16}$$

en van $\exp(j\omega t)$ via (15.6) en substitueren van (15.16) en (15.6) in (15.15) leidt tot

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \cos(\omega t) - \mathrm{Im}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] \sin(\omega t). \tag{15.17}$$

Gelijkstellen van de rechterleden van (15.14) en (15.17) voor alle t geeft

$$\mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Im}[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] = -\mathbf{E}_s(\mathbf{r}), \tag{15.18}$$

zodat

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) - j\mathbf{E}_s(\mathbf{r}). \tag{15.19}$$

Het is eenvoudig te verifiëren, dat voor de partiële afgeleiden naar de

plaatscoördinaten en naar de tijd voor vectoriële grootheden dezelfde regels gelden als voor scalaire grootheden.

Een ander aspect van een sinusvormig met de tijd veranderende *vectoriële grootheid* is haar zgn. *polarisatietoestand* (niet te verwarren met de elektrische polarisatie **P**). Om deze te definiëren, gebruikt men de meetkundige voorstelling van een vectoriële grootheid en let men — in een bepaald punt in de ruimte — op de figuur die het eindpunt van het gerichte lijnstuk dat de vectoriële grootheid voorstelt, als functie van de tijd beschrijft. Zoals uit (15.14) blijkt, is $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ voor iedere t een lineaire combinatie van $\mathbf{E}_c(\mathbf{r})$ en $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$, zodat het met $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ corresponderende gerichte lijnstuk is gelegen in het platte vlak door de gerichte lijnstukken die $\mathbf{E}_c(\mathbf{r})$ en $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ voorstellen. Het eindpunt van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ beschrijft dus een vlakke kromme. Teneinde deze kromme verder te analyseren, vatten wij de kentallen van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ op als plaatscoördinaten in het platte vlak door $\mathbf{E}_c(\mathbf{r})$ en $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ en schrijven $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ in de gedaante

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}'\cos(\omega t-\psi)+\mathbf{E}''\sin(\omega t-\psi), \tag{15.20}$$

waarin wij ψ zodanig trachten te bepalen, dat $\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}''=0$. Indien dit lukt, is (15.20) een parametervoorstelling van de gezochte kromme op onderling loodrechte coördinaatassen. Verwacht wordt, dat deze laatste voorstelling eenvoudiger te interpreteren valt dan (15.14), die in wezen een parametervoorstelling van de gezochte kromme is op scheefhoekige coördinaatassen. Daar (15.14) en (15.20) voor alle t identiek moeten zijn, verkrijgt men door $\omega t=\psi$ te stellen

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_c\cos(\psi)+\mathbf{E}_s\sin(\psi) \tag{15.21}$$

en door $\omega t=\psi+\pi/2$ te stellen

$$\mathbf{E}'' = -\mathbf{E}_c\sin(\psi)+\mathbf{E}_s\cos(\psi). \tag{15.22}$$

De voorwaarde $\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}''=0$ leidt dan tot

$$\tan(2\psi) = \frac{2\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s}{\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s}. \tag{15.23}$$

Omtrent de keuze van 2ψ bij gegeven rechterlid in (15.23) maken wij de afspraak, dat $\sin(2\psi)$ hetzelfde teken heeft als $\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s$ en $\cos(2\psi)$ hetzelfde teken als $\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s$. Verder kiezen wij 2ψ in het interval $-\pi\leq 2\psi\leq\pi$. De gevolgen van deze tekenafspraak zijn weergegeven in onderstaand overzicht

	$\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s>0$, $\sin(2\psi)>0$	$\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s<0$, $\sin(2\psi)<0$
$\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s>0$, $\cos(2\psi)>0$	$0<2\psi<\pi/2$	$-\pi/2<2\psi<0$
$\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s<0$, $\cos(2\psi)<0$	$\pi/2<2\psi<\pi$	$-\pi<2\psi<-\pi/2$

Daar aan (15.23) altijd is te voldoen, kunnen wij van nu af onderstellen, dat $\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}''=0$. Dan volgt uit (15.20)

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}'=(\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}')\cos(\omega t-\psi) \quad \text{en} \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}''=(\mathbf{E}''\cdot\mathbf{E}'')\sin(\omega t-\psi). \tag{15.24}$$

Derhalve volgt door elimineren van $\omega t-\psi$

$$\frac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}')^2}{(\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}')^2}+\frac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}'')^2}{(\mathbf{E}''\cdot\mathbf{E}'')^2}=1 \quad \text{of} \quad \frac{[\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}'/|\mathbf{E}'|)]^2}{|\mathbf{E}'|^2}+\frac{[\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}''/|\mathbf{E}''|)]^2}{|\mathbf{E}''|^2}=1. \tag{15.25}$$

Vergelijking (15.25) stelt een ellips voor met hoofdassen langs $\mathbf{E}'$ en $\mathbf{E}''$; de lengte van de halve hoofdas langs $\mathbf{E}'$ is gegeven door $|\mathbf{E}'|$ en de lengte van de halve hoofdas langs $\mathbf{E}''$ door $|\mathbf{E}''|$. Met gebruikmaking van (15.23) en de afspraak omtrent de tekenverdeling van 2ψ vindt men

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{E}'=\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c+\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s)+[\tfrac{1}{4}(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s)^2+(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{15.26}$$

en

$$\mathbf{E}''\cdot\mathbf{E}''=\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c+\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s)-[\tfrac{1}{4}(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_c-\mathbf{E}_s\cdot\mathbf{E}_s)^2+(\mathbf{E}_c\cdot\mathbf{E}_s)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{15.27}$$

Tevens geldt

$$\mathbf{E}'\times\mathbf{E}''=\mathbf{E}_c\times\mathbf{E}_s. \tag{15.28}$$

Als het eindpunt van de vector die $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ voorstelt, inderdaad een ellips beschrijft — en geen ontaardingen daarvan — noemt men het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ter plaatse $\mathbf{r}$ *elliptisch gepolariseerd.* De twee mogelijke gevallen van ontaarding worden hieronder besproken.

(a) Als de ellips ontaardt in een rechte lijn, noemt men het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ter plaatse $\mathbf{r}$ *lineair gepolariseerd.* In dat geval hebben $\mathbf{E}_c$ en $\mathbf{E}_s$ dezelfde of tegengestelde richting en is $\mathbf{E}_c\times\mathbf{E}_s=\mathbf{0}$. Met behulp van de

complexe voorstelling $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ is deze voorwaarde te schrijven als

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \qquad \text{(lineair gepolariseerde } \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\text{)}, \tag{15.29}$$

waarin * wederom de toegevoegd complexe grootheid aanduidt.

(b) Als de ellips ontaardt in een cirkel, noemt men het veld $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ter plaatse $\mathbf{r}$ *circulair gepolariseerd*. In dat geval staan $\mathbf{E}_c$ en $\mathbf{E}_s$ loodrecht op elkaar en is de lengte van $\mathbf{E}_c$ gelijk aan de lengte van $\mathbf{E}_s$, d.w.z. $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_s = 0$ en $\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c = \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s$. Met behulp van de complexe voorstelling $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ zijn deze twee voorwaarden te schrijven als

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{(circulair gepolariseerde } \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\text{)}. \tag{15.30}$$

De drie onderscheiden polarisatietoestanden zijn weergegeven in Fig. 23.

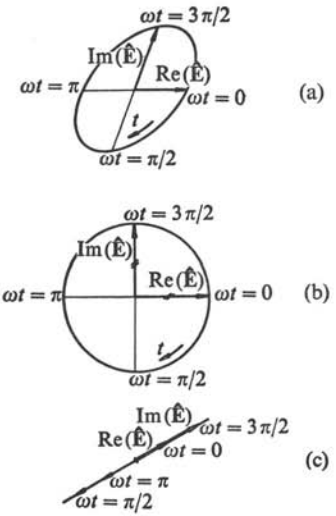


Fig. 23. Polarisatietoestand van een sinusvormig met de tijd veranderende, vectoriële grootheid: (a) elliptische polarisatie, (b) circulaire polarisatie, (c) lineaire polarisatie.

De richting waarin de ellips/de cirkel wordt doorlopen, kan worden vastgelegd ten opzichte van een gekozen richting loodrecht op het platte vlak door $\mathbf{E}_c$ en $\mathbf{E}_s$. (In Fig. 23 zijn de twee mogelijkheden: loodrecht op het vlak van het papier naar voren of loodrecht op het vlak van het papier naar achteren.) Indien de ellips/de cirkel rechts-cyclisch ten opzichte van deze richting wordt doorlopen, noemt men $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ten opzichte van deze richting rechts-elliptisch/rechts-circulair gepolariseerd,

indien de ellips/de cirkel links-cyclisch ten opzichte van deze richting wordt doorlopen, noemt men $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ ten opzichte van deze richting links-elliptisch/links-circulair gepolariseerd.

Bij het optreden van sinusvormig met de tijd veranderende grootheden zijn ook bepaalde producten van twee van zulke grootheden van belang; deze producten treden met name op bij de uitwisseling van energie (zie Par. 12). Als voorbeeld van zo'n grootheid beschouwen wij de vector van POYNTING: $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$. Laat $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ een sinusvormig met de tijd veranderende elektrische veldsterkte en $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ een sinusvormig met de tijd en met dezelfde cirkelfrequentie veranderende magnetische veldsterkte zijn. Dan is

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_c(\mathbf{r})\cos(\omega t)+\mathbf{E}_s(\mathbf{r})\sin(\omega t), \tag{15.31}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_c(\mathbf{r})\cos(\omega t)+\mathbf{H}_s(\mathbf{r})\sin(\omega t). \tag{15.32}$$

De vector van POYNTING is dan gegeven door

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = {} & \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H}_c+\mathbf{E}_s\times\mathbf{H}_s)+\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H}_c-\mathbf{E}_s\times\mathbf{H}_s)\cos(2\omega t)\\ & +\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H}_s+\mathbf{E}_s\times\mathbf{H}_c)\sin(2\omega t).\end{aligned} \tag{15.33}$$

Omtrent het rechterlid van (15.33) valt op te merken, dat de van t afhankelijke termen bij middeling over een periode $T=2\pi/\omega$ de gemiddelde waarde nul hebben, zodat de van t onafhankelijke term tevens de gemiddelde waarde van $\mathbf{S}$ over een periode aangeeft. Met behulp van de notatie $\langle\ldots\rangle_T$ voor de gemiddelde waarde over een periode, d.w.z.

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T \overset{\text{def}}{=\!=} T^{-1}\int_{t_0}^{t_0+T}\mathbf{S}\,dt, \tag{15.34}$$

volgt derhalve uit (15.33)

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H}_c+\mathbf{E}_s\times\mathbf{H}_s). \tag{15.35}$$

Via de complexe voorstellingen van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ verkrijgt men

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}\exp(\mathrm{j}\omega t)]\times\mathrm{Re}[\hat{\mathbf{H}}\exp(\mathrm{j}\omega t)]\\ &= \tfrac{1}{2}[\hat{\mathbf{E}}\exp(\mathrm{j}\omega t)+\hat{\mathbf{E}}^*\exp(-\mathrm{j}\omega t)]\times\tfrac{1}{2}[\hat{\mathbf{H}}\exp(\mathrm{j}\omega t)+\hat{\mathbf{H}}^*\exp(-\mathrm{j}\omega t)]\\ &= \tfrac{1}{4}[\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*+\hat{\mathbf{E}}^*\times\hat{\mathbf{H}}]\\ &\quad +\tfrac{1}{4}[(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}})\exp(2\mathrm{j}\omega t)+(\hat{\mathbf{E}}^*\times\hat{\mathbf{H}}^*)\exp(-2\mathrm{j}\omega t)]\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*]+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}})\exp(2\mathrm{j}\omega t)].\end{aligned} \tag{15.36}$$

Uit het rechterlid van (15.36) volgt

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*], \tag{15.37}$$

hetgeen in overeenstemming is met (15.35), daar op grond van (15.19) $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_c - j\mathbf{E}_s$ en $\hat{\mathbf{H}}^* = \mathbf{H}_c + j\mathbf{H}_s$. Verder valt uit het laatste resultaat in (15.36) op te maken, dat het voor het berekenen van $\langle \mathbf{S} \rangle_T$ nodig is de beschikking te hebben over een vergelijking waarin $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$ voorkomt; deze zal in Par. 18 worden afgeleid. Indien men belang stelt in de met frequentie 2ω oscillerende bijdrage tot $\mathbf{S}$ moet men de beschikking hebben over een vergelijking waarin $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}$ voorkomt; deze bijdrage zullen wij niet verder beschouwen.

Opmerking. In de elektrotechniek is het gebruikelijk bij de complexe rekenwijze de functie $\exp(j\omega t)$ als complexe tijdfactor te nemen en j als aanduiding voor de imaginaire eenheid te gebruiken. Aan dit gebruik zullen wij ons — ook verderop in onze beschouwingen — houden. In de optica daarentegen is het gebruikelijk bij de complexe rekenwijze de functie $\exp(-i\omega t)$ als complexe tijdfactor te nemen en i als aanduiding voor de imaginaire eenheid te gebruiken. Dit heeft bepaalde gevolgen, waarvan er enkele in de vraagstukken aan de orde zullen komen. Zodra nu de toepassing van optische verschijnselen in de elektrotechniek wordt bestudeerd — aan beide gebieden liggen elektromagnetische verschijnselen ten grondslag — ontstaat er een conflict tussen het gebruik van $\exp(j\omega t)$ dan wel $\exp(-i\omega t)$ als complexe tijdfactor en zal de keus op één ervan moeten vallen. In dit verband verdient het aanbeveling om (a) bij de bestudering van iedere publikatie waarin van de complexe rekenwijze gebruik wordt gemaakt, na te gaan welke de gebruikte complexe tijdfactor is en (b) zelf altijd duidelijk aan te geven welke complexe tijdfactor men gebruikt.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 15.1. Bewijs, dat voor de complexe vectoren $\hat{\mathbf{E}}$ en $\hat{\mathbf{H}}$ het volgende geldt: (a) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, (b) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} = -\hat{\mathbf{H}} \times \hat{\mathbf{E}}$, (c) $(\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}})^* = \hat{\mathbf{E}}^* \cdot \hat{\mathbf{H}}^*$, (d) $(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}})^* = \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^*$.

Vraagstuk 15.2. Als $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}' + j\mathbf{E}''$, waarin $\mathbf{E}'$ en $\mathbf{E}''$ reële vectoren zijn, bepaal dan (a) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, (b) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{E}}$, (c) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^*$, (d) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{E}}^*$.
Antwoord: (a) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' - \mathbf{E}'' \cdot \mathbf{E}'' + 2j\mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}''$; (b) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$; (c) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^* = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' \cdot \mathbf{E}''$; (d) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{E}}^* = -2j\mathbf{E}' \times \mathbf{E}''$.

Vraagstuk 15.3. Als $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}' + j\mathbf{E}''$ en $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}' + j\mathbf{H}''$, waarin $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}'$ en $\mathbf{H}''$ reële vectoren zijn, bepaal dan (a) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}}$, (b) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}$, (c) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}}^*$, (d) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$.
Antwoord: (a) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' - \mathbf{E}'' \cdot \mathbf{H}'' + j(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}'' + \mathbf{E}'' \cdot \mathbf{H}')$; (b) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' - \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'' + j(\mathbf{E}' \times \mathbf{H}'' + \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}')$; (c) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{H}}^* = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}' + \mathbf{E}'' \cdot \mathbf{H}'' + j(\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{H}' - \mathbf{E}' \cdot \mathbf{H}'')$; (d) $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' + \mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'' + j(\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}' - \mathbf{E}' \times \mathbf{H}'')$.

Vraagstuk 15.4. In een bepaald punt in de ruimte geldt $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0\hat{\phi}$ en $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0\hat{\phi}$, waarin $\mathbf{E}_0$ en $\mathbf{H}_0$ reële vectoren zijn en $\hat{\phi}$ een complexe scalar is. Bepaal (a) de polarisatietoestand van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, (b) de polarisatietoestand van $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$, (c) $\langle\mathbf{S}\rangle_T$.
Antwoord: (a) lineair; (b) lineair; (c) $\langle\mathbf{S}\rangle_T = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0)\hat{\phi}\hat{\phi}^*$.

Vraagstuk 15.5. In een bepaald punt in de ruimte geldt $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0\hat{\phi}$ en $\hat{\mathbf{H}} = \mathrm{j}\mathbf{H}_0\hat{\phi}$, waarin $\mathbf{E}_0$ en $\mathbf{H}_0$ reële vectoren zijn en $\hat{\phi}$ een complexe scalar voorstelt. Bepaal (a) de polarisatietoestand van $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, (b) de polarisatietoestand van $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$; (c) $\langle\mathbf{S}\rangle_T$.
Antwoord: (a) lineair; (b) lineair; (c) $\langle\mathbf{S}\rangle_T = \mathbf{0}$.

Vraagstuk 15.6. Gegeven is het lineair gepolariseerde elektrische veld $\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_0\mathbf{i}_x$, waarin $\hat{E}_0$ een complexe scalar voorstelt. Laat zien, dat door te schrijven $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_L + \hat{\mathbf{E}}_R$, waarin $\hat{\mathbf{E}}_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\hat{E}_0\mathbf{i}_x + \mathrm{j}\hat{E}_0\mathbf{i}_y)$ en $\hat{\mathbf{E}}_R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\hat{E}_0\mathbf{i}_x - \mathrm{j}\hat{E}_0\mathbf{i}_y)$, het lineair gepolariseerde veld $\mathbf{E}$ is geschreven als de superpositie van de circulair gepolariseerde velden $\mathbf{E}_L$ en $\mathbf{E}_R$. Bewijs, dat $\mathbf{E}_L$ een ten opzichte van de positieve z-as links-circulair gepolariseerd veld is en $\mathbf{E}_R$ een ten opzichte van de positieve z-as rechts-circulair gepolariseerd veld. Bepaal tenslotte $\hat{\mathbf{E}}_L\cdot\hat{\mathbf{E}}_L^*$ en $\hat{\mathbf{E}}_R\cdot\hat{\mathbf{E}}_R^*$.
Antwoord: $\hat{\mathbf{E}}_L\cdot\hat{\mathbf{E}}_L^* = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{E}_0^*$ en $\hat{\mathbf{E}}_R\cdot\hat{\mathbf{E}}_R^* = \frac{1}{2}\hat{E}_0\hat{E}_0^*$. (Merk op, dat $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^* = \hat{\mathbf{E}}_L\cdot\hat{\mathbf{E}}_L^* + \hat{\mathbf{E}}_R\cdot\hat{\mathbf{E}}_R^*$, doordat $\hat{\mathbf{E}}_L\cdot\hat{\mathbf{E}}_R^* = \hat{\mathbf{E}}_L^*\cdot\hat{\mathbf{E}}_R = 0$.)

Vraagstuk 15.7. Bepaal de polarisatietoestand van het elektrische veld dat is gegeven door $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_c\cos(\omega t) + \mathbf{E}_s\sin(\omega t)$, indien (a) $\mathbf{E}_s = \mathbf{0}$, (b) $\mathbf{E}_c = \mathbf{0}$.
Antwoord: (a) lineair; (b) lineair. (Hieruit volgt, dat iedere elliptisch of circulair gepolariseerde vectoriële grootheid kan worden geschreven als superpositie van twee lineair gepolariseerde vectoriële grootheden.)

Vraagstuk 15.8. Aan de sinusvormig met de tijd veranderende ruimtelijke ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r},t) = \rho_c(\mathbf{r})\cos(\omega t) + \rho_s(\mathbf{r})\sin(\omega t)$ wordt een complexe voorstelling $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ toegevoegd volgens het voorschrift $\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}[\hat{\rho}(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)]$. Druk $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ uit in $\rho_c(\mathbf{r})$ en $\rho_s(\mathbf{r})$.
Antwoord: $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \rho_c(\mathbf{r}) + \mathrm{i}\rho_s(\mathbf{r})$.

Vraagstuk 15.9. Als voor de complexe rekenwijze wordt gebruik gemaakt van de complexe tijdfactor $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, waarmee corresponderen dan de operatoren ∂_t en ∇?
Antwoord: $\partial_t \Rightarrow -\mathrm{i}\omega$, $\nabla \Rightarrow \nabla$.

16. Analyse en synthese volgens Fourier. Veldgrootheden als functie van de tijd

De in Par. 15 behandelde sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden vormen de basis voor de analyse en de synthese volgens FOURIER. In deze paragraaf zullen wij aandacht schenken aan de tijdafhankelijkheid van de veldgrootheden; een soortgelijke beschouwing over de plaatsafhankelijkheid komt aan de orde in Par. 17. Voor drie soorten tijdafhankelijkheid van de veldgrootheden zal worden aangegeven hoe de analyse en de synthese volgens FOURIER verlopen, te weten (a) in de tijd periodieke veldgrootheden, (b) in de tijd voorbijgaande veldgrootheden, (c) veldgrootheden die uit bijdragen van gegeven discrete frequenties zijn opgebouwd, waarbij deze frequenties onderling onmeetbaar zijn. (Indien de gegeven frequenties onder (c) onderling meetbaar zijn, is er een voor alle bijdragen gemeenschappelijke periode en valt de theorie onder het onder (a) aangegeven geval.) De aangegeven drie gevallen zullen hieronder apart worden besproken. Daar de behandeling van vectoriële veldgrootheden op dezelfde wijze als die voor scalaire veldgrootheden verloopt, zullen wij alleen de formules voor scalaire veldgrootheden geven. Terwille van de wiskundige algemeenheid zullen wij de mogelijkheid openlaten, dat de veldgrootheden behalve reële ook complexe waarden aannemen; de tijdvariabele t blijft echter reëel.

(a) *In de tijd periodieke veldgrootheden*

Laat $f = f(\mathbf{r}, t)$ een in de tijd periodieke veldgrootheid zijn met periode T, dan is

$$f(\mathbf{r}, t+T) = f(\mathbf{r}, t) \qquad \text{voor alle } t \text{ in } -\infty < t < \infty. \tag{16.1}$$

Onder tamelijk ruime voorwaarden kan $f = f(\mathbf{r}, t)$ worden voorgesteld door een ontwikkeling van de gedaante

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(\mathbf{r}) \exp(\mathrm{j}n\omega t), \tag{16.2}$$

waarin

$$\omega = 2\pi/T. \tag{16.3}$$

Daar $\exp[jn\omega(t+T)] = \exp(jn\omega t)$, is het rechterlid van (16.2) inderdaad periodiek in t met periode T. De rij grootheden $\{\hat{f}_n(\mathbf{r})\}$ hangt samen met het verloop van $f(\mathbf{r},t)$ gedurende één periode. In de onderstelling, dat (16.2) geldig is, wordt voor $\hat{f}_n(\mathbf{r})$ verkregen

$$\hat{f}_n(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r},t)\exp(-jn\omega t)\rangle_T \qquad \text{voor } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{16.4}$$

waarin $\langle\ldots\rangle_T$ wederom de over een periode T gemiddelde waarde aangeeft. Om (16.4) af te leiden, beschouwen wij $\langle f(\mathbf{r},t)\exp(-jm\omega t)\rangle_T$ voor $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ en substitueren hierin (16.2). Het resultaat is

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{r},t)\exp(-jm\omega t)\rangle_T &= \left\langle\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n(\mathbf{r})\exp(jn\omega t)\right]\exp(-jm\omega t)\right\rangle_T \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n(\mathbf{r})\,\langle\exp[j(n-m)\omega t]\rangle_T \\ &= \hat{f}_m(\mathbf{r}) \qquad \text{voor } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,\end{aligned} \tag{16.5}$$

daar

$$\langle\exp[j(n-m)\omega t]\rangle_T = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \neq m, \\ 1 & \text{voor } n = m. \end{cases} \tag{16.6}$$

Indien $\hat{f}_n(\mathbf{r})$ volgens (16.4) wordt bepaald, wordt het rechterlid van (16.2) de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende *reeks van* FOURIER genoemd; de grootheden $\{\hat{f}_n(\mathbf{r})\}$ heten de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende *coefficiënten van* FOURIER.

Uit (16.4) volgt, dat de rij van de met $f(\mathbf{r},t)^*$ corresponderende coëfficiënten van FOURIER is gegeven door $\{\hat{f}_{-n}(\mathbf{r})^*\}$ als $\{\hat{f}_n(\mathbf{r})\}$ de rij van de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende coëfficiënten van FOURIER voorstelt. Als $f(\mathbf{r},t)$ een reële functie is, volgt hieruit, dat

$$\hat{f}_{-n}(\mathbf{r}) = \hat{f}_n(\mathbf{r})^* \qquad \text{voor } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{16.7}$$

Op grond van (16.7) kan (16.2) dan worden herschreven als

$$f(\mathbf{r},t) = \hat{f}_0(\mathbf{r}) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[\hat{f}_n(\mathbf{r})\exp(jn\omega t)]. \tag{16.8}$$

De termen van de reeks in het rechterlid van (16.8) zijn van de gedaante (15.4); hiermee is het verband met reële, sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden en met de complexe rekenwijze gelegd.

In de theorie spelen voorts nog een rol de convolutie van twee in de tijd

periodieke veldgrootheden met dezelfde periode en de over een periode gemiddelde waarde van het product van twee van zulke veldgrootheden; de laatste grootheid houdt verband met de uitwisseling van energie (zie Par. 12). Laten $f = f(\mathbf{r},t)$ en $g = g(\mathbf{r},t)$ twee in de tijd periodieke veldgrootheden met dezelfde periode T zijn, dan is

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega t), \tag{16.9}$$

met

$$\hat{f}_m(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r},t) \exp(-jm\omega t)\rangle_T \qquad \text{voor } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{16.10}$$

en

$$g(\mathbf{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(jn\omega t), \tag{16.11}$$

met

$$\hat{g}_n(\mathbf{r}) = \langle g(\mathbf{r},t) \exp(-jn\omega t)\rangle_T \qquad \text{voor } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{16.12}$$

Onder de *convolutie* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ verstaat men de van τ afhankelijke grootheid

$$\langle f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r},\tau-t)\rangle_T = \langle f(\mathbf{r},\tau-t)\, g(\mathbf{r},t)\rangle_T. \tag{16.13}$$

Met behulp van (16.9) t/m (16.12) en (16.6) vindt men

$$\langle f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r},\tau-t)\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{g}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega\tau). \tag{16.14}$$

Voor de *over een periode gemiddelde waarde van het product* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ vindt men met behulp van (16.9) t/m (16.12) en (16.6)

$$\langle f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r},t)\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{g}_{-m}(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-n}(\mathbf{r})\hat{g}_n(\mathbf{r}). \tag{16.15}$$

Voor het speciale geval, dat $g(\mathbf{r},t) \equiv f(\mathbf{r},t)^*$, ontstaat uit (16.15) de betrekking

$$\langle f(\mathbf{r},t) f(\mathbf{r},t)^*\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{f}_m(\mathbf{r})^*,$$

of

$$\langle |f(\mathbf{r},t)|^2\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_m(\mathbf{r})|^2; \tag{16.16}$$

deze betrekking staat bekend als de *formule van* PARSEVAL.

(b) *In de tijd voorbijgaande veldgrootheden*

Laat $f = f(\mathbf{r},t)$ een in de tijd voorbijgaande veldgrootheid zijn; hieronder verstaan wij een veldgrootheid die voor $t\to-\infty$ en voor $t\to\infty$ voldoende snel tot nul nadert. Onder tamelijk ruime verdere voorwaarden kan $f = f(\mathbf{r},t)$ worden voorgesteld door een integraal van de gedaante

$$f(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega. \tag{16.17}$$

Indien $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ op $-\infty<\omega<\infty$ absoluut integreerbaar is, valt met behulp van de stelling van RIEMANN-LEBESGUE (zie b.v. WHITTAKER and WATSON[21]) te bewijzen, dat het rechterlid van (16.17) inderdaad tot nul nadert voor $t\to-\infty$ en voor $t\to\infty$. De functie $\hat{f} = \hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ hangt samen met het verloop van $f(\mathbf{r},t)$ in het interval $-\infty<t<\infty$. In de onderstelling dat (16.17) geldig is, wordt voor $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ verkregen

$$\hat{f}(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty. \tag{16.18}$$

Om (16.18) af te leiden, beschouwen wij het rechterlid voor een bepaalde waarde Ω van ω en substitueren de voorstelling (16.17) in de resulterende integraal. Hiermee wordt verkregen

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{j}\Omega t)\,\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}(\omega-\Omega)t]\,\mathrm{d}t$$

$$= \hat{f}(\mathbf{r},\Omega), \tag{16.19}$$

daar

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}(\omega-\Omega)t]\,\mathrm{d}t = \delta(\omega-\Omega) \tag{16.20}$$

en de eenheidsstoot de eigenschap heeft, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\mathbf{r},\omega)\,\delta(\omega-\Omega)\,\mathrm{d}\omega = \hat{f}(\mathbf{r},\Omega) \tag{16.21}$$

voor iedere continue functie $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$. Indien $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ volgens (16.18) wordt bepaald, wordt het rechterlid van (16.17) de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende

21. WHITTAKER, E.T. and G.N. WATSON, *A course of modern analysis*, 4th. ed., Cambridge University Press, 1952, p. 172.

integraal van FOURIER genoemd; de grootheid $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ heet het *complexe frequentiespectrum* van $f(\mathbf{r},t)$.

Uit (16.18) volgt, dat het met $f(\mathbf{r},t)^*$ corresponderende complexe frequentiespectrum is gegeven door $\hat{f}(\mathbf{r},-\omega)^*$ als $\hat{f}(\mathbf{r},\omega)$ het complexe frequentiespectrum van $f(\mathbf{r},t)$ voorstelt. Als $f(\mathbf{r},t)$ een reële functie is, volgt hieruit, dat

$$\hat{f}(\mathbf{r},-\omega) = \hat{f}(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty. \tag{16.22}$$

Op grond van (16.22) kan (16.17) dan worden herschreven als

$$f(\mathbf{r},t) = \pi^{-1}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\hat{f}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)]\,\mathrm{d}\omega. \tag{16.23}$$

De integrand in het rechterlid van (16.23) is van de gedaante (15.4); hiermee is het verband met reële, sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden en met de complexe rekenwijze gelegd.

In de theorie spelen voorts nog een rol de convolutie van twee in de tijd voorbijgaande veldgrootheden en de naar de tijd geïntegreerde waarde van het product van twee in de tijd voorbijgaande veldgrootheden; de laatste grootheid houdt verband met de uitwisseling van energie (zie Par. 12). Laten $f = f(\mathbf{r},t)$ en $g = g(\mathbf{r},t)$ twee in de tijd voorbijgaande veldgrootheden zijn, dan is

$$f(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega, \tag{16.24}$$

met

$$\hat{f}(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t, \tag{16.25}$$

en

$$g(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^\infty \hat{g}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega, \tag{16.26}$$

met

$$\hat{g}(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^\infty g(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t. \tag{16.27}$$

Onder de *convolutie* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ verstaat men de van τ afhankelijke grootheid

$$\int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},\tau-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{r},\tau-t)\,g(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t. \tag{16.28}$$

Met behulp van (16.24) t/m (16.27) en (16.20) vindt men

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},\tau-t)\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r},\omega)\hat{g}(\mathbf{r},\omega)\exp(\mathrm{j}\omega\tau)\,\mathrm{d}\omega. \tag{16.29}$$

Voor de *naar de tijd geïntegreerde waarde van het product* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ vindt men met behulp van (16.24) t/m (16.27) en (16.20)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r},\omega)\hat{g}(\mathbf{r},-\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r},-\omega)\hat{g}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega. \tag{16.30}$$

Voor het speciale geval, dat $g(\mathbf{r},t) \equiv f(\mathbf{r},t)^*$, ontstaat uit (16.30) de betrekking

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r},t)\,f(\mathbf{r},t)^*\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{f}(\mathbf{r},\omega)^*\,\mathrm{d}\omega,$$

of

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{r},t)|^2\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\mathbf{r},\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega; \tag{16.31}$$

deze betrekking staat bekend als de *formule van* PARSEVAL.

(c) *Veldgrootheden, opgebouwd uit bijdragen van gegeven discrete frequenties*

Laat $f = f(\mathbf{r},t)$ een veldgrootheid zijn waarvan is gegeven dat zij is opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties $\{\Omega_n\}$ uit een voorgeschreven, begrensde of onbegrensde rij, waarvoor $\Omega_0 \overset{\text{def}}{=\!=} 0$ en $\Omega_n > 0$ voor $n = 1, 2, \ldots$ Teneinde voor $f = f(\mathbf{r},t)$ een representatie met tijdfuncties van de gedaante $\exp(\mathrm{j}\Omega_n t)$ te kunnen gebruiken, voeren wij in

$$\Omega_{-n} \overset{\text{def}}{=\!=} -\Omega_n \qquad \text{voor } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16.32}$$

en stellen

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_n t). \tag{16.33}$$

Wij nemen aan, dat de getallen Ω_n onderling onmeetbaar zijn; indien de getallen Ω_n onderling meetbaar zijn, is er een voor alle termen van de gedaante $\exp(\mathrm{j}\Omega_n t)$ gemeenschappelijke periode en valt de theorie onder

het onder (a) behandelde geval. De rij grootheden $\{\hat{f}_n(\mathbf{r})\}$ hangt samen met het verloop van $f(\mathbf{r},t)$ in het interval $-\infty<t<\infty$. Om de uitdrukking voor $\hat{f}_n(\mathbf{r})$ in een overzichtelijke vorm te schrijven, voeren wij de volgende operator in

$$\langle\ldots\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T_1\to-\infty,\,T_2\to\infty}(T_2-T_1)^{-1}\int_{T_1}^{T_2}\ldots\,\mathrm{d}t; \tag{16.34}$$

deze is op te vatten als de middelingsoperator voor het oneindige interval $T_1<t<T_2$ voor $T_1\to-\infty$ en $T_2\to\infty$. In de onderstelling, dat (16.33) geldig is, wordt voor $\hat{f}_n(\mathbf{r})$ verkregen

$$\hat{f}_n(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\Omega_n t)\rangle \qquad \text{voor } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{16.35}$$

Om (16.35) af te leiden, beschouwen wij $\langle f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\Omega_m t)\rangle$ en substitueren hierin (16.33). Het resultaat is

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\Omega_m t)\rangle &= \left\langle\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_n t)\right]\exp(-\mathrm{j}\Omega_m t)\right\rangle\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n(\mathbf{r})\,\langle\exp[\mathrm{j}(\Omega_n-\Omega_m)t]\rangle\\ &= \hat{f}_m(\mathbf{r}) \qquad \text{voor } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,\end{aligned} \tag{16.36}$$

daar

$$\langle\exp[\mathrm{j}(\Omega_n-\Omega_m)t]\rangle = \begin{cases} 0 & \text{voor } n\neq m,\\ 1 & \text{voor } n = m.\end{cases} \tag{16.37}$$

Uit (16.35) volgt, dat de rij van de met $f(\mathbf{r},t)^*$ corresponderende coëfficiënten is gegeven door $\{\hat{f}_{-n}(\mathbf{r})^*\}$ als $\{\hat{f}_n(\mathbf{r})\}$ de rij van de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende coëfficiënten voorstelt. Als $f(\mathbf{r},t)$ een reële veldgrootheid is, volgt hieruit, dat

$$\hat{f}_{-n}(\mathbf{r}) = \hat{f}_n(\mathbf{r})^* \qquad \text{voor } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{16.38}$$

Op grond van (16.38) en (16.32) kan (16.33) dan worden herschreven als

$$f(\mathbf{r},t) = \hat{f}_0(\mathbf{r}) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[\hat{f}_n(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_n t)]. \tag{16.39}$$

De termen van de reeks in het rechterlid van (16.39) zijn van de gedaante (15.4); hiermee is het verband met reële, sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden en met de complexe rekenwijze gelegd.

In de theorie spelen voorts nog een rol de convolutie van twee veldgrootheden die beide zijn opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties $\{\Omega_n\}$, alsmede de over het tijds-

interval $T_1<t<T_2$ voor $T_1\to-\infty$ en $T_2\to\infty$ gemiddelde waarde van het product van twee van zulke veldgrootheden; de laatste grootheid houdt verband met de uitwisseling van energie (zie Par. 12). Laten $f=f(\mathbf{r},t)$ en $g=g(\mathbf{r},t)$ twee veldgrootheden zijn, waarvan is gegeven, dat zij beide zijn opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties uit de gemeenschappelijke rij $\{\Omega_n\}$; ten aanzien van $\{\Omega_n\}$ geldt (16.32). Dan is

$$f(\mathbf{r},t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}_m(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_m t), \tag{16.40}$$

met

$$\hat{f}_m(\mathbf{r})=\langle f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\Omega_m t)\rangle \qquad \text{voor } m=0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{16.41}$$

en

$$g(\mathbf{r},t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{g}_n(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_n t), \tag{16.42}$$

met

$$\hat{g}_n(\mathbf{r})=\langle g(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\Omega_n t)\rangle \qquad \text{voor } n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{16.43}$$

Onder de *convolutie* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ verstaat men de van τ afhankelijke grootheid

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},\tau-t)\rangle=\langle f(\mathbf{r},\tau-t)\,g(\mathbf{r},t)\rangle. \tag{16.44}$$

Met behulp van (16.40) t/m (16.43) en (16.37) vindt men

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},\tau-t)\rangle=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{g}_m(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\Omega_m\tau). \tag{16.45}$$

Voor de *over het tijdsinterval* $T_1<t<T_2$ *voor* $T_1\to-\infty$ *en* $T_2\to\infty$ *gemiddelde waarde van het product* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ vindt men met behulp van (16.40) t/m (16.43) en (16.37)

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},t)\rangle=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{g}_{-m}(\mathbf{r})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}_{-n}(\mathbf{r})\hat{g}_n(\mathbf{r}). \tag{16.46}$$

Voor het speciale geval, dat $g(\mathbf{r},t)\equiv f(\mathbf{r},t)^*$, ontstaat uit (16.46) de betrekking

$$\langle f(\mathbf{r},t)f(\mathbf{r},t)^*\rangle=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{f}_m(\mathbf{r})\hat{f}_m(\mathbf{r})^*,$$

of

$$\langle|f(\mathbf{r},t)|^2\rangle=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_m(\mathbf{r})|^2; \tag{16.47}$$

deze betrekking staat bekend als de *formule van* PARSEVAL.

De onder (c) behandelde theorie is een onderdeel van de zgn. *gegeneraliseerde harmonische analyse*. De veldgrootheden van het type (16.33) komen voor bij lineaire parametrische interactie van elektromagnetische velden; de beschouwde tijdfuncties staan in verband met de zgn. bijnaperiodieke functies.

Bij het rekenen met de veldgrootheden als functie van de tijd zegt men wel, dat men in het *tijddomein* werkt; bij het rekenen met de complexe representaties zegt men wel, dat men in het *frequentiedomein* werkt. De voorstellingen van de gedaante (16.2), (16.17) en (16.33) noemt men wel *spectrale voorstellingen* van $f(\mathbf{r}, t)$.

Voor details met betrekking tot de fouriermethoden in de tijd verwijzen wij naar PAPOULIS[22].

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 16.1. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r}, t)$ en $g = g(\mathbf{r}, t)$ zijn periodiek in de tijd met dezelfde periode T. Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega t)$ en $g(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(jn\omega t)$, waarin $\omega = 2\pi/T$. Bewijs, dat $\langle f(\mathbf{r}, t+\tau) g(\mathbf{r}, t)\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \hat{g}_{-m}(\mathbf{r}) \exp(jm\omega\tau)$ en dat $\langle f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-n}(\mathbf{r}) \hat{g}_n(\mathbf{r}) \times \exp(jn\omega\tau)$. (Merk op, dat $\langle f(\mathbf{r}, t+\tau) g(\mathbf{r}, t)\rangle_T \neq \langle f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle_T$.)

Vraagstuk 16.2. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r}, t)$ en $g = g(\mathbf{r}, t)$ zijn voorbijgaand in de tijd. Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$ en $g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$. Bewijs, dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t+\tau) g(\mathbf{r}, t)\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) \times \hat{g}(\mathbf{r}, -\omega) \exp(j\omega\tau)\, d\omega$ en dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, -\omega) \hat{g}(\mathbf{r}, \omega) \times \exp(j\omega\tau)\, d\omega$. (Merk op, dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t+\tau) g(\mathbf{r}, t)\, dt \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\, dt$.)

Vraagstuk 16.3. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r}, t)$ en $g = g(\mathbf{r}, t)$ zijn opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties uit de voorgeschreven rij $\{\Omega_n\}$, waarbij $\Omega_{-n} = -\Omega_n$ voor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_m t)$ en $g(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_n t)$. Bewijs, dat $\langle f(\mathbf{r}, t+\tau) \times g(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \hat{g}_{-m}(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_m\tau)$ en dat $\langle f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-n}(\mathbf{r}) \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_n\tau)$. (Merk op, dat $\langle f(\mathbf{r}, t+\tau) g(\mathbf{r}, t)\rangle \neq \langle f(\mathbf{r}, t) g(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle$.)

Vraagstuk 16.4. De vectoriële veldgrootheden $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zijn periodiek in de tijd met dezelfde periode T. Onderstel, dat $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega t)$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r}) \exp(jn\omega t)$, waarin $\omega = 2\pi/T$. Bewijs, dat (a) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \tau - t)\rangle_T = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau - t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r})] \exp(jm\omega\tau)$, (b) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t+\tau) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\rangle_T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_{-m}(\mathbf{r})] \exp(jm\omega\tau)$ en (c) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t+\tau)\rangle_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_{-n}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r})] \exp(jn\omega\tau)$.

22. PAPOULIS, A., *The Fourier integral and its applications*, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

Vraagstuk 16.5. De vectoriële veldgrootheden $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zijn voorbijgaand in de tijd. Onderstel, dat $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$. Bewijs, dat (a) $\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \tau - t)]\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau - t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)] \exp(j\omega\tau)\, d\omega$, (b) $\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t + \tau) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, -\omega)] \exp(j\omega\tau)\, d\omega$ en (c) $\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t + \tau)]\, dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, -\omega) \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)] \exp(j\omega\tau)\, d\omega$.

Vraagstuk 16.6. De vectoriële veldgrootheden $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zijn opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties uit de voorgeschreven rij $\{\Omega_n\}$, waarbij $\Omega_{-n} = -\Omega_n$ voor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Onderstel, dat $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_m t)$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r}) \exp(i\Omega_n t)$. Bewijs, dat (a) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \tau - t) \rangle = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau - t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r})] \exp(j\Omega_m \tau)$, (b) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t + \tau) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_{-m}(\mathbf{r})] \exp(j\Omega_m \tau)$ en (c) $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\hat{\mathbf{E}}_{-n}(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{H}}_n(\mathbf{r})] \exp(j\Omega_n \tau)$.

Vraagstuk 16.7. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r}, t)$ en $g = g(\mathbf{r}, t)$ zijn periodiek in de tijd met dezelfde periode T. Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega t)$ en $g(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(jn\omega t)$, waarin $\omega = 2\pi/T$. Bewijs, dat $f(\mathbf{r}, t)\, g(\mathbf{r}, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r})\, \hat{g}_{p-m}(\mathbf{r})] \exp(jp\omega t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{p-n}(\mathbf{r})\, \hat{g}_n(\mathbf{r})] \exp(jp\omega t)$.

Vraagstuk 16.8. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r}, t)$ en $g = g(\mathbf{r}, t)$ zijn voorbijgaand in de tijd. Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$ en $g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mathbf{r}, \Omega) \exp(j\Omega t)\, d\Omega$. Bewijs, dat $f(\mathbf{r}, t)\, g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) \times \hat{g}(\mathbf{r}, \chi - \omega)\, d\omega] \exp(j\chi t)\, d\chi = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \chi - \Omega) \hat{g}(\mathbf{r}, \Omega)\, d\Omega] \times \exp(j\chi t)\, d\chi$.

Vraagstuk 16.9. De scalaire veldgrootheid $f = f(\mathbf{r}, t)$ is periodiek in de tijd met periode T en de scalaire veldgrootheid $g = g(\mathbf{r}, t)$ is voorbijgaand in de tijd. Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \exp(jm\omega t)$, waarin $\omega = 2\pi/T$ en $g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\mathbf{r}, \Omega) \times \exp(j\Omega t)\, d\Omega$. Bewijs, dat $f(\mathbf{r}, t)\, g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m(\mathbf{r}) \hat{g}(\mathbf{r}, \chi - m\omega)] \times \exp(j\chi t)\, d\chi$.

Vraagstuk 16.10. De scalaire veldgrootheid $f = f(\mathbf{r}, t)$ is voorbijgaand in de tijd en de scalaire veldgrootheid $g = g(\mathbf{r}, t)$ is opgebouwd uit sinusvormig met de tijd veranderende bijdragen met cirkelfrequenties uit de voorgeschreven rij $\{\Omega_n\}$, waarbij $\Omega_{-n} = -\Omega_n$ voor $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Onderstel, dat $f(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\, d\omega$ en $g(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n(\mathbf{r}) \exp(j\Omega_n t)$. Bewijs, dat $f(\mathbf{r}, t)\, g(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{r}, \chi - \Omega_n) \times \hat{g}_n(\mathbf{r})] \exp(j\chi t)\, d\chi$.

17. Analyse en synthese volgens Fourier. Veldgrootheden als functie van de plaats in de ruimte

Bij de in Par. 16 behandelde analyse en synthese volgens FOURIER is alleen op de tijdafhankelijkheid van de veldgrootheden gelet en traden de plaatscoördinaten slechts als parameters op. Een dergelijke methode is ook van toepassing op de plaatsafhankelijkheid van de veldgrootheden, waarbij de tijdcoördinaat als parameter optreedt. Voor twee soorten plaatsafhankelijkheid van de veldgrootheden zal worden aangegeven hoe de analyse en de synthese volgens FOURIER verlopen, te weten (a) in de ruimte periodieke veldgrootheden en (b) in de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden d.w.z. veldgrootheden die op het oneindige voldoende snel tot nul naderen. De aangegeven twee gevallen zullen hieronder apart worden besproken. Daar de behandeling van vectoriële veldgrootheden op dezelfde wijze als die voor scalaire veldgrootheden verloopt, zullen wij alleen de formules voor scalaire veldgrootheden geven. Terwille van de wiskundige algemeenheid zullen wij de mogelijkheid openlaten, dat de veldgrootheden behalve reële ook complexe waarden aannemen; de ruimtelijke variabelen x, y en z blijven echter reëel.

(a) *In de ruimte periodieke veldgrootheden*

Laat $f = f(\mathbf{r},t)$ een in de ruimte periodieke veldgrootheid zijn met drie lineair onafhankelijke vectoriële perioden $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$, dan is

$$f(\mathbf{r}+\mathbf{a}_1, t) = f(\mathbf{r}+\mathbf{a}_2,t) = f(\mathbf{r}+\mathbf{a}_3,t) = f(\mathbf{r},t) \text{ voor alle } \mathbf{r}. \quad (17.1)$$

De vectoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ zijn op te vatten als de drie basisvectoren van een driedimensionaal *rooster*, waarin de punten met plaatsvector $\mathbf{r} = n_1\mathbf{a}_1+n_2\mathbf{a}_2+n_3\mathbf{a}_3$ (n_1, n_2 en n_3 willekeurige gehele getallen) *roosterpunten* worden genoemd. De verbindingsvectoren van twee willekeurige roosterpunten zijn wederom vectoriële perioden van het rooster. Het aldus ingevoerde rooster staat in de fysica bekend als het *directe rooster*. Onder tamelijk ruime voorwaarden kan $f = f(\mathbf{r},t)$ worden voorgesteld door een reeks van FOURIER waarin de drie basisvectoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$ van

het zgn. *reciproke rooster* optreden. Deze zijn als volgt gedefinieerd

$$\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{b}_q = \begin{cases} 1 & \text{voor } p = q, \\ 0 & \text{voor } p \neq q, \end{cases} \qquad \text{met } p, q = 1, 2, 3. \tag{17.2}$$

Uitgeschreven luiden de voorwaarden (17.2)

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_3 = 0, \\ &\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 = 0, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = 1, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = 0, \\ &\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = 0, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2 = 0, \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = 1. \end{aligned} \tag{17.3}$$

Het is eenvoudig te verifiëren, dat

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= V_a^{-1}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \\ \mathbf{b}_2 &= V_a^{-1}(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1), \\ \mathbf{b}_3 &= V_a^{-1}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \end{aligned} \tag{17.4}$$

waarin

$$V_a = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) = \mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \tag{17.5}$$

de inhoud van het op $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ beschreven blok voorstelt. Verder geldt

$$V_a V_b = 1, \tag{17.6}$$

waarin

$$V_b = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_2 \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_3 \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \tag{17.7}$$

de inhoud van het op $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$ beschreven blok voorstelt. Daar $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ en $\mathbf{a}_3$ lineair onafhankelijk zijn, is $V_a \neq 0$. Uit (17.6) volgt, dat dan ook $V_b \neq 0$, zodat ook $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$ lineair onafhankelijk zijn. Door (17.2) of (17.3) te gebruiken, is te verifiëren dat een ontwikkeling van de gedaante

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) = &\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{n_1, n_2, n_3}(t) \\ &\times \exp\left[2\pi \mathrm{j}(n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2 + n_3 \mathbf{b}_3) \cdot \mathbf{r}\right] \end{aligned} \tag{17.8}$$

aan (17.1) voldoet. De rij grootheden $\{\tilde{f}_{n_1, n_2, n_3}(t)\}$ hangt samen met het verloop van $f(\mathbf{r}, t)$ in één cel $\mathscr{V}_a$ in het directe rooster. Hieronder verstaan wij het gebied in de ruimte waarvoor

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{a}_1 + \eta \mathbf{a}_2 + \zeta \mathbf{a}_3 \qquad \text{met } 0 < \xi < 1,\ 0 < \eta < 1,\ 0 < \zeta < 1. \tag{17.9}$$

Om de uitdrukking voor $\tilde{f}_{n_1, n_2, n_3}(t)$ op overzichtelijke wijze weer te

geven, voeren wij de middelingsoperator over $\mathscr{V}_a$ in via

$$\langle \ldots \rangle_{\mathscr{V}_a} \stackrel{\text{def}}{=} V_a^{-1} \iiint_{\mathscr{V}_a} \ldots \mathrm{d}V. \tag{17.10}$$

Met behulp van de notatie (17.10) is

$$\tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t) = \langle f(\mathbf{r},t) \exp[-2\pi\mathrm{j}(n_1\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{b}_2+n_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$\text{voor } n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{17.11}$$

Om (17.11) af te leiden, beschouwen wij $\langle f(\mathbf{r},t) \exp[-2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2+m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$ voor $m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ en substitueren hierin (17.8). Nu is

$$\langle \exp[2\pi\mathrm{j}\{(n_1-m_1)\mathbf{b}_1+(n_2-m_2)\mathbf{b}_2+(n_3-m_3)\mathbf{b}_3\}\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{voor } n_1 = m_1 \text{ en } n_2 = m_2 \text{ en } n_3 = m_3, \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases} \tag{17.12}$$

Dit resultaat leidt men af door in de integraal over $\mathscr{V}_a$ als integratievariabelen de ξ, η en ζ uit (17.9) in te voeren en gebruik te maken van de Jacobiaan, die $\mathrm{d}V$ met $\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$ in verband brengt via $\mathrm{d}V = V_a \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$. Zo verkrijgt men

$$V_a^{-1} \iiint_{\mathscr{V}_a} \exp[2\pi\mathrm{j}\{(n_1-m_1)\mathbf{b}_1+(n_2-m_2)\mathbf{b}_2+(n_3-m_3)\mathbf{b}_3\}\cdot\mathbf{r}]\,\mathrm{d}V$$
$$= \int_0^1 \exp[2\pi\mathrm{j}(n_1-m_1)\xi]\,\mathrm{d}\xi \int_0^1 \exp[2\pi\mathrm{j}(n_2-m_2)\eta]\,\mathrm{d}\eta$$
$$\times \int_0^1 \exp[2\pi\mathrm{j}(n_3-m_3)\zeta]\,\mathrm{d}\zeta$$
$$= \begin{Bmatrix} 1 \text{ voor } n_1 = m_1 \\ 0 \text{ voor } n_1 \neq m_1 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \text{ voor } n_2 = m_2 \\ 0 \text{ voor } n_2 \neq m_2 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \text{ voor } n_3 = m_3 \\ 0 \text{ voor } n_3 \neq m_3 \end{Bmatrix}. \tag{17.13}$$

Met gebruikmaking van (17.12) wordt dan verkregen

$$\langle f(\mathbf{r},t) \exp[-2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1+m_2\mathbf{b}_2+m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t)$$
$$\times \langle \exp[2\pi\mathrm{j}\{(n_1-m_1)\mathbf{b}_1+(n_2-m_2)\mathbf{b}_2+(n_3-m_3)\mathbf{b}_3\}\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$= \tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t) \qquad \text{voor } m_1, m_2, m_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{17.14}$$

Indien $\tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t)$ volgens (17.11) wordt bepaald, wordt het rechterlid van (17.8) de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende reeks van FOURIER genoemd; de grootheden $\{\tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t)\}$ heten de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende *coëfficiënten van* FOURIER.

Uit (17.11) volgt, dat de rij van de met $f(\mathbf{r},t)^*$ corresponderende coëfficiënten van FOURIER is gegeven door $\{\tilde{f}_{-n_1,-n_2,-n_3}(t)^*\}$ als $\{\tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t)\}$ de rij van de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende coëfficiënten van FOURIER voorstelt.

In de theorie spelen voorts nog een rol de convolutie van twee in de ruimte periodieke veldgrootheden met dezelfde vectoriële perioden en de over een cel gemiddelde waarde van het product van twee van zulke veldgrootheden. Laten $f=f(\mathbf{r},t)$ en $g=g(\mathbf{r},t)$ twee in de ruimte periodieke veldgrootheden zijn met dezelfde vectoriële perioden, dan is

$$f(\mathbf{r},t)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\sum_{m_3=-\infty}^{\infty}\tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)\times\exp[2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1+m_2\mathbf{b}_2+m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}], \tag{17.15}$$

met

$$\tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)=\langle f(\mathbf{r},t)\exp[-2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1+m_2\mathbf{b}_2+m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$\text{voor } m_1, m_2, m_3 = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{17.16}$$

en

$$g(\mathbf{r},t)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{n_3=-\infty}^{\infty}\tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t)\times\exp[2\pi\mathrm{j}(n_1\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{b}_2+n_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}], \tag{17.17}$$

met

$$\tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t)=\langle g(\mathbf{r},t)\exp[-2\pi\mathrm{j}(n_1\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{b}_2+n_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]\rangle_{\mathscr{V}_a}$$
$$\text{voor } n_1, n_2, n_3 = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{17.18}$$

Onder de *convolutie* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ verstaat men de van $\boldsymbol{\rho}$ afhankelijke grootheid

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a}=\langle f(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a}. \tag{17.19}$$

Met behulp van (17.15) t/m (17.18) en (17.12) vindt men

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{n_1,n_2,n_3}(t)\,\tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t) \times \exp[2\pi\mathrm{j}(n_1\mathbf{b}_1+n_2\mathbf{b}_2+n_3\mathbf{b}_3)\cdot\boldsymbol{\rho}]. \qquad (17.20)$$

Voor de *over een cel gemiddelde waarde van het product* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ vindt men met behulp van (17.15) t/m (17.18) en (17.12)

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,g(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a}$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)\,\tilde{g}_{-m_1,-m_2,-m_3}(t)$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*}_{-n_1,-n_2,-n_3}(t)\,\tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t). \qquad (17.21)$$

Voor het speciale geval, dat $g(\mathbf{r},t) \equiv f(\mathbf{r},t)^*$, ontstaat uit (17.21) de betrekking

$$\langle f(\mathbf{r},t)\,f(\mathbf{r},t)^*\rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)\,\tilde{f}^{*}_{m_1,m_2,m_3}(t),$$

of

$$\langle |f(\mathbf{r},t)|^2\rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\sum_{m_3=-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)|^2; \qquad (17.22)$$

deze betrekking staat bekend als de *formule van* PARSEVAL.

(b) *In de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden*

Laat $f(\mathbf{r},t)$ een in de ruimte gelocaliseerde veldgrootheid zijn; hieronder verstaan wij een veldgrootheid die voor $|\mathbf{r}| \to \infty$, uniform in alle richtingen, voldoende snel tot nul nadert. Onder tamelijk ruime verdere voorwaarden kan $f = f(\mathbf{r},t)$ dan worden voorgesteld door een integraal van de gedaante

$$f(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3}\iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t)\exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}, \qquad (17.23)$$

waarin de integratie zich uitstrekt over alle waarden van $\mathbf{k} = k_x\mathbf{i}_x + k_y\mathbf{i}_y + k_z\mathbf{i}_z$ en waarin $\mathrm{d}V_{\mathbf{k}} = \mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z$. In (17.23) is

$$\exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = \exp[\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)]. \qquad (17.24)$$

Indien $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ absoluut integreerbaar is over de gehele **k**-ruimte, valt met behulp van de stelling van RIEMANN-LEBESGUE (zie blz. 134) te bewijzen, dat het rechterlid van (17.23) inderdaad tot nul nadert voor $|\mathbf{r}|\to\infty$. De functie $\tilde{f}=\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ hangt samen met het verloop van $f(\mathbf{r},t)$ in de fysische ruimte, die wij bij de integratie als **r**-ruimte zullen aanduiden. In de onderstelling dat (17.23) geldig is, wordt voor $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ verkregen

$$\tilde{f}(\mathbf{k},t)=\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\exp(-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}, \tag{17.25}$$

waarbij de integratie zich uitstrekt over de gehele **r**-ruimte en waarin $\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Om (17.25) af te leiden, beschouwen wij het rechterlid voor een bepaalde waarde **K** van **k** en substitueren de voorstelling (17.23) in de resulterende integraal. Hiermee wordt verkregen

$$(2\pi)^{-3}\iiint_{\text{r-ruimte}}\exp(-\mathrm{j}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}\iiint_{\text{k-ruimte}}\tilde{f}(\mathbf{k},t)\exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$$

$$=(2\pi)^{-3}\iiint_{\text{k-ruimte}}\tilde{f}(\mathbf{k},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}\iiint_{\text{r-ruimte}}\exp[\mathrm{j}(\mathbf{k}-\mathbf{K})\cdot\mathbf{r}]\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}$$

$$=\tilde{f}(\mathbf{K},t), \tag{17.26}$$

daar

$$(2\pi)^{-3}\iiint_{\text{r-ruimte}}\exp[\mathrm{j}(\mathbf{k}-\mathbf{K})\cdot\mathbf{r}]\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{K}), \tag{17.27}$$

waarin δ de (driedimensionale) eenheidsstoot (distributie van DIRAC) voorstelt. De driedimensionale eenheidsstoot heeft de eigenschap, dat

$$\iiint_{\text{k-ruimte}}\tilde{f}(\mathbf{k},t)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{K})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}=\tilde{f}(\mathbf{K},t) \tag{17.28}$$

voor iedere continue functie $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$. Indien $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ volgens (17.25) wordt bepaald, wordt het rechterlid van (17.23) de met $f(\mathbf{r},t)$ corresponderende integraal van FOURIER genoemd; de grootheid $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ wordt wel het *complexe ruimtelijke spectrum* van $f(\mathbf{r},t)$ genoemd.

Uit (17.25) volgt, dat het met $f(\mathbf{r},t)^*$ corresponderende ruimtelijke spectrum is gegeven door $\tilde{f}(-\mathbf{k},t)^*$ als $\tilde{f}(\mathbf{k},t)$ het complexe ruimtelijke spectrum van $f(\mathbf{r},t)$ voorstelt.

In de theorie spelen voorts nog een rol de convolutie van twee in de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden en de over de gehele **r**-ruimte geïntegreerde waarde van het product van twee van zulke veldgrootheden. Laten $f=f(\mathbf{r},t)$ en $g=g(\mathbf{r},t)$ twee in de ruimte gelocaliseerde veld-

grootheden zijn, dan is

$$f(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}, \tag{17.29}$$

met

$$\tilde{f}(\mathbf{k},t) = \iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t) \exp(-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}, \tag{17.30}$$

en

$$g(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{g}(\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}, \tag{17.31}$$

met

$$\tilde{g}(\mathbf{k},t) = \iiint_{\text{r-ruimte}} g(\mathbf{r},t) \exp(-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}. \tag{17.32}$$

Onder de *convolutie* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ verstaat men de van $\boldsymbol{\rho}$ afhankelijke grootheid

$$\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, g(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}} = \iiint_{\text{r-ruimte}} f(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}. \tag{17.33}$$

Met behulp van (17.29) t/m (17.32) en (17.27) vindt men

$$\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, g(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}$$

$$= (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t)\, \tilde{g}(\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}. \tag{17.34}$$

Voor de *over de gehele* **r***-ruimte geïntegreerde waarde van het product* van $f(\mathbf{r},t)$ en $g(\mathbf{r},t)$ vindt men met behulp van (17.29) t/m (17.32) en (17.27)

$$\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{r}}$$

$$= (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t)\, \tilde{g}(-\mathbf{k},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$$

$$= (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(-\mathbf{k},t)\, \tilde{g}(\mathbf{k},t)\,\mathrm{d}V_{\mathbf{k}}. \tag{17.35}$$

Voor het speciale geval, dat $g(\mathbf{r},t) \equiv f(\mathbf{r},t)^*$, ontstaat uit (17.35) de betrekking

$$\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, f(\mathbf{r},t)^*\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t)\, \tilde{f}(\mathbf{k},t)^*\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}},$$

of

$$\iiint_{\text{r-ruimte}} |f(\mathbf{r},t)|^2\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} |\tilde{f}(\mathbf{k},t)|^2\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}}; \qquad (17.36)$$

deze betrekking staat bekend als de *formule van* PARSEVAL.

Bij het rekenen met de veldgrootheden als functie van de plaats $\mathbf{r}$ zegt men wel, dat men in de *fysische ruimte* werkt. De voorstellingen van de gedaante (17.8) en (17.23) noemt men wel *ruimtelijke spectrale voorstellingen* van $f(\mathbf{r},t)$. De $\mathbf{k}$-ruimte duidt men ook wel aan als de *golfvectorruimte* ($\mathbf{k}$ = golfvector).

Toepassing van de fouriermethoden in de ruimte vindt men in uiteenlopende vakgebieden, zoals de antennetheorie, de theorie van de quantummechanische golffuncties in een kristal (periodieke structuur) en in de optica. Voor toepassingen in dit laatste gebied verwijzen wij naar GOODMAN[23] en PAPOULIS[24].

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 17.1. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r},t)$ en $g = g(\mathbf{r},t)$ zijn periodiek in de ruimte met dezelfde vectoriële perioden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Onderstel, dat $f(\mathbf{r},t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t) \exp[2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]$ en $g(\mathbf{r},t) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t) \exp[2\pi\mathrm{j}(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]$, waarin $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ de basisvectoren van het reciproke rooster zijn. Bewijs, dat $\langle f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, g(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{m_1,m_2,m_3}(t)\, \tilde{g}_{-m_1,-m_2,-m_3}(t) \exp[2\pi\mathrm{j}(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3)\cdot\boldsymbol{\rho}]$ en dat $\langle f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{-n_1,-n_2,-n_3}(t)\, \tilde{g}_{n_1,n_2,n_3}(t) \exp[2\pi\mathrm{j} \times (n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3)\cdot\boldsymbol{\rho}]$; hierin is $\mathscr{V}_a$ het gebied waarvoor $\mathbf{r} = \xi\mathbf{a}_1 + \eta\mathbf{a}_2 + \zeta\mathbf{a}_3$, met $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $0<\zeta<1$. (Merk op, dat $\langle f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, g(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathscr{V}_a} \neq \langle f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\rangle_{\mathscr{V}_a}$.)

Vraagstuk 17.2. De scalaire veldgrootheden $f = f(\mathbf{r},t)$ en $g = g(\mathbf{r},t)$ zijn in de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden. Onderstel, dat $\tilde{f}(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t) \times \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$ en $g(\mathbf{r},t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{g}(\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$. Bewijs, dat $\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, g(\mathbf{r},t)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(\mathbf{k},t)\, \tilde{g}(-\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$ en dat $\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{f}(-\mathbf{k},t)\, \tilde{g}(\mathbf{k},t) \exp(\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\, \mathrm{d}V_{\mathbf{k}}$. (Merk op, dat $\iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, g(\mathbf{r},t)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}} \neq \iiint_{\text{r-ruimte}} f(\mathbf{r},t)\, g(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho},t)\, \mathrm{d}V_{\mathbf{r}}$.)

23. GOODMAN, J.W., *Introduction to Fourier optics*. San Francisco, McGraw-Hill Book Company, 1968.
24. PAPOULIS, A., *Systems and transforms with applications in optics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.

Vraagstuk 17.3. De vectoriële veldgrootheden $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zijn periodiek in de ruimte met dezelfde vectoriële perioden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Onderstel, dat $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_{m_1, m_2, m_3}(t) \exp[2\pi j(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}_{n_1, n_2, n_3}(t) \exp[2\pi j(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3)\cdot\mathbf{r}]$, waarin $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ de basisvectoren van het reciproke rooster zijn. Bewijs, dat $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}_{m_1, m_2, m_3}(t) \times \tilde{\mathbf{H}}_{-m_1, -m_2, -m_3}(t)] \exp[2\pi j(m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3)\cdot\boldsymbol{\rho}]$ en dat $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t) \rangle_{\mathscr{V}_a} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}_{-n_1, -n_2, -n_3}(t) \times \tilde{\mathbf{H}}_{n_1, n_2, n_3}(t)] \exp[2\pi j(n_1\mathbf{b}_1 + n_2\mathbf{b}_2 + n_3\mathbf{b}_3)\cdot\boldsymbol{\rho}]$; hierin is $\mathscr{V}_a$ het gebied waarvoor $\mathbf{r} = \xi\mathbf{a}_1 + \eta\mathbf{a}_2 + \zeta\mathbf{a}_3$, met $0 < \xi < 1$, $0 < \eta < 1$, $0 < \zeta < 1$.

Vraagstuk 17.4. De vectoriële veldgrootheden $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ zijn in de ruimte gelocaliseerde veldgrootheden. Onderstel, dat $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \times \exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, dV_{\mathbf{k}}$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t) \exp(j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\, dV_{\mathbf{k}}$. Bewijs, dat $\iiint_{\text{r-ruimte}} [\mathbf{E}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]\, dV_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} [\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(-\mathbf{k}, t)] \exp(j\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\, dV_{\mathbf{k}}$ en dat $\iiint_{\text{r-ruimte}} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, t)]\, dV_{\mathbf{r}} = (2\pi)^{-3} \iiint_{\text{k-ruimte}} [\tilde{\mathbf{E}}(-\mathbf{k}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t)] \exp(j\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})\, dV_{\mathbf{k}}$.

18. De elektromagnetische veldvergelijkingen, de constitutieve vergelijkingen, de randvoorwaarden en de vermogensbalans in het frequentiedomein

In deze paragraaf geven wij een overzicht van de grondvergelijkingen van de theorie van het elektromagnetische veld in het frequentiedomein. Hieronder verstaan wij de vergelijkingen waaraan de complexe veldgrootheden in het frequentiedomein, aan te duiden met $\{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\rho}(\mathbf{r},\omega)\}$, moeten voldoen. Welke wiskundige operatie op grootheden van de gedaante $\{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega), \hat{\rho}(\mathbf{r},\omega)\} \exp(j\omega t)$ moet worden toegepast om de ermee corresponderende grootheden in het tijddomein te construeren, is besproken in Par. 16. Tevens is daar toegelicht hoe de in Par. 15 behandelde complexe rekenwijze (met complexe tijdfactor $\exp(j\omega t)$) in het geheel past. Wat de aanwezige media betreft, zullen wij van de aanvang af onderstellen, dat hun elektromagnetische eigenschappen lineair en tijdinvariant zijn. Dit heeft tot gevolg, dat de constitutieve vergelijkingen geen aanleiding geven tot koppeling tussen frequentiecomponenten met van elkaar verschillende cirkelfrequenties. (Bij niet-lineaire en bij parametrisch geëxciteerde media treedt een dergelijke koppeling wel op.)

(a) *De elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein*

Uitgaande van de elektromagnetische veldvergelijkingen (9.8) t/m (9.11) in het tijddomein worden met behulp van de in Par. 15 behandelde regels als elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein verkregen

$$\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}} + j\omega\hat{\mathbf{D}}, \tag{18.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{E}} = -j\omega\hat{\mathbf{B}}, \tag{18.2}$$

$$\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}, \tag{18.3}$$

$$\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{B}} = 0. \tag{18.4}$$

Op overeenkomstige wijze verkrijgt men uit de continuïteitsvergelijking (9.5) voor de elektrische stroom in het tijddomein de volgende conti-

nuïteitsvergelijking voor de elektrische stroom in het frequentiedomein

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{J}} + j\omega\hat{\rho} = 0. \tag{18.5}$$

Verder gaan (9.6) en (9.7) over in respectievelijk

$$\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{P}}, \tag{18.6}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mu_0(\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{M}}). \tag{18.7}$$

Deze vergelijkingen zijn van toepassing zowel in een materieel medium als in vacuüm. (In vacuüm geldt $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{0}$ en $\hat{\rho} = 0$.) Bij het toepassen van de vergelijkingen op een stroom van geladen deeltjes treedt een moeilijkheid op. In dit geval is de elektrische stroomdichtheid van de gedaante (zie (2.25))

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)\mathbf{v}_{\text{conv}}(\mathbf{r},t), \tag{18.8}$$

waarbij wij het opschrift $^{(\alpha)}$ ter aanduiding van het type geladen deeltje hebben weggelaten. Onderstel nu, dat zowel ρ als $\mathbf{v}_{\text{conv}}$ met cirkelfrequentie ω sinusvormig in de tijd rondom een tijdonafhankelijke waarde fluctueren. Dan geldt

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \operatorname{Re}[\hat{\rho}_1(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)] \tag{18.9}$$

en

$$\mathbf{v}_{\text{conv}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}_{\text{conv},0}(\mathbf{r}) + \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{v}}_{\text{conv},1}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)], \tag{18.10}$$

waarin $\rho_0(\mathbf{r})$ en $\mathbf{v}_{\text{conv},0}(\mathbf{r})$ het tijdonafhankelijke deel van ρ resp. $\mathbf{v}_{\text{conv}}$ voorstellen. Substitutie van (18.9) en (18.10) in het rechterlid van (18.8) leidt tot een uitdrukking voor $\mathbf{J}$ van de gedaante

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) + \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{J}}_1(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)] + \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{J}}_2(\mathbf{r}) \exp(2j\omega t)]; \tag{18.11}$$

hierin is

$$\mathbf{J}_0 = \rho_0\mathbf{v}_{\text{conv},0} + \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}[\hat{\rho}_1\hat{\mathbf{v}}_{\text{conv},1}^*], \tag{18.12}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_1 = \rho_0\hat{\mathbf{v}}_{\text{conv},1} + \hat{\rho}_1\mathbf{v}_{\text{conv},0}, \tag{18.13}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_2 = \tfrac{1}{2}\hat{\rho}_1\hat{\mathbf{v}}_{\text{conv},1}. \tag{18.14}$$

Uit (18.11) blijkt, dat $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$ uit drie frequentiecomponenten bestaat, nl. één met cirkelfrequentie 0, één met cirkelfrequentie ω en één met cirkelfrequentie 2ω. Dit heeft tot gevolg, dat ook elk van de overige veldgrootheden frequentiecomponenten met cirkelfrequenties 0, ω en 2ω heeft. Voor de frequentiecomponenten met cirkelfrequentie ω gelden dan (18.1) t/m (18.7), mits in (18.5) $\mathbf{J}$ wordt vervangen door $\hat{\mathbf{J}}_1$ en $\hat{\rho}$ door $\hat{\rho}_1$.

De formules (18.9) t/m (18.14) vinden vooral toepassing in de elektromagnetische theorie van de elektronenbuizen, met name bij berekeningen aan microgolfelektronenbuizen.

(b) *De constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein*

Voor de constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein wordt, uitgaande van (10.7) t/m (10.9) verkregen

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.15}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.16}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = \mu(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.17}$$

waarin σ, ε en μ reëel zijn. Bij het experimenteel bepalen van de elektromagnetische materiaalcoëfficiënten in het frequentiedomein — dit geschiedt door het bepalen van $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega)$, $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega)$ in afhankelijkheid van $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$ — blijken deze coëfficiënten voor een groot aantal stoffen complex en frequentieafhankelijk te zijn. Waar dit verschijnsel optreedt, dienen (18.15) t/m (18.17) te worden vervangen door vergelijkingen van de gedaante

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.18}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.19}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \tag{18.20}$$

waarin

$\hat{\sigma}$ = complexe soortelijke geleiding,
$\hat{\varepsilon}$ = complexe permittiviteit,
$\hat{\mu}$ = complexe permeabiliteit.

Het is duidelijk, dat constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein die de gedaante van (18.18) t/m (18.20) hebben, onmogelijk kunnen ontstaan uit constitutieve vergelijkingen in het tijddomein van de gedaante (10.7) t/m (10.9). Zodoende rijst de vraag, met welke constitutieve vergelijkingen in het tijddomein de vergelijkingen van het type (18.18) t/m (18.20) corresponderen; deze vraag zal worden beantwoord in Par. 19. Daar zal blijken, dat $\hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega)$, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)$ inderdaad zijn op te vatten als fouriergetransformeerden van bepaalde materiaalgrootheden in het tijddomein, waarmee de notatie $\hat{}$ gerechtvaardigd is.

(c) *De randvoorwaarden in het frequentiedomein*

Laat Σ een tijdonafhankelijk scheidingsvlak tussen twee verschillende media zijn en laat $\mathbf{v}$ de eenheidsvector langs de normaal op Σ, gericht van „Zijde 1" naar „Zijde 2", voorstellen. Voor de randvoorwaarden op Σ in het frequentiedomein wordt dan, uitgaande van (11.7), (11.8), (11.14), (11.15) en (11.16) verkregen

$$\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{v}\times\hat{\mathbf{H}}_1 \qquad \text{op } \Sigma, \tag{18.21}$$

$$\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{v}\times\hat{\mathbf{E}}_1 \qquad \text{op } \Sigma, \tag{18.22}$$

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{D}}_2 - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{D}}_1 = \hat{\sigma} \qquad \text{op } \Sigma, \tag{18.23}$$

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{B}}_1 \qquad \text{op } \Sigma, \tag{18.24}$$

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{J}}_2 - \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{J}}_1 = -\mathrm{j}\omega\hat{\sigma} \quad \text{op } \Sigma. \tag{18.25}$$

Hierin duidt de index 1 de limietwaarde aan van de veldgrootheden op Σ bij nadering van „Zijde 1" af en de index 2 de limietwaarde van de veldgrootheden op Σ bij nadering van „Zijde 2" af. Het is duidelijk, dat de randvoorwaarden (18.21) t/m (18.25) ook uit de elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein kunnen worden afgeleid met behulp van de in Par. 11 beschreven methode.

(d) *De vermogensbalans in het frequentiedomein*

Voor het opstellen van de vermogensbalans in het frequentiedomein sluiten wij aan bij (12.30) en merken op, dat voor sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden (Par. 15) en voor de in Par. 16 onder (a), (b) en (c) besproken gevallen van tijdafhankelijkheid een uitspraak kan worden gedaan uit welke bijdragen de op onomkeerbare wijze in een gebied omgezette energie is samengesteld. Daartoe beschouwen wij de uitdrukking voor de over een periode gemiddelde (Par. 15 en Par. 16, geval (a)), de naar de tijd geïntegreerde (Par. 16, geval (b)), dan wel de over de tijd gemiddelde (Par. 16, geval (c)) waarde van de vector van POYNTING $\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$. Op grond van (15.37), (16.15), (16.30), respectievelijk (16.46), krijgen wij in alle vier de gevallen in het frequentiedomein te maken met de grootheid $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\times\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},-\omega)$. Voor veldgrootheden die als functie van de tijd reëel zijn — dit is in de klassieke natuurkunde altijd het geval — is deze grootheid gelijkwaardig met

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\times\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\times\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)^*. \tag{18.26}$$

Daar het rechterlid van (18.26) na het weglaten van de argumenten $\mathbf{r}$ en ω, die alle veldgrootheden gemeen hebben, tot minder schrijfwerk leidt, zullen wij verder in de beschouwing $\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$ schrijven. Met behulp van (18.1) en (18.2) wordt op soortgelijke wijze als in Par. 12 verkregen (vergelijk (12.28))

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{J}}^* - j\omega \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{D}}^* + j\omega \hat{\mathbf{H}}^* \cdot \hat{\mathbf{B}} + \operatorname{div}(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*) = 0. \tag{18.27}$$

Teneinde dit resultaat fysisch te interpreteren, integreren wij (18.27) over het in Fig. 24 aangegeven gebied $\mathscr{V}_1$. Onder toepassing van

$$\iiint_{\mathscr{V}_1} \operatorname{div}(\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)\, dV = \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)\, dA - \oiint_{\mathscr{S}_{\text{source}}} \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)\, dA \tag{18.28}$$

(vergelijk (12.12)) wordt dan verkregen

$$\iiint_{\mathscr{V}_1} \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{J}}^*\, dV + \iiint_{\mathscr{V}_1} (-j\omega \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{D}}^* + j\omega \hat{\mathbf{H}}^* \cdot \hat{\mathbf{B}})\, dV$$

$$+ \oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)\, dA = \oiint_{\mathscr{S}_{\text{source}}} \mathbf{n} \cdot (\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*)\, dA. \tag{18.29}$$

Deze vergelijking treedt in de plaats van (12.29) en staat bekend als de vermogensbalans in het frequentiedomein; (18.29) wordt ook wel het complexe theorema van POYNTING genoemd.

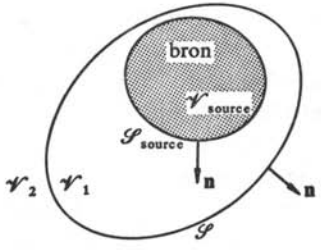


Fig. 24. Uitwisseling van elektromagnetische energie ($\mathscr{V}_{\text{source}}$ is een brongebied).

Aan de hand van (18.29) zullen wij nu het geval van *sinusvormig met de tijd veranderende veldgrootheden* verder vervolgen; voor de overige gevallen van tijdafhankelijkheid verlopen de berekeningen op volkomen

analoge wijze. Op grond van (12.17), (12.18) en (15.37) geldt

$$\langle P\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*)\,\mathrm{d}A\right] \tag{18.30}$$

en

$$\langle P_{\text{source}}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\oiint_{\mathscr{S}_{\text{source}}} \mathbf{n}\cdot(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*)\,\mathrm{d}A\right]. \tag{18.31}$$

Daar verder

$$\langle \partial_t W_{\text{em}}\rangle_T = 0, \tag{18.32}$$

wordt dan uit (12.30) verkregen

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T + \langle P\rangle_T = \langle P_{\text{source}}\rangle_T. \tag{18.33}$$

Met behulp van (18.29), (18.30) en (18.31) volgt hieruit

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\iiint_{\mathscr{V}_1} (\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{J}}^* - \mathrm{j}\omega\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{D}}^* + \mathrm{j}\omega\hat{\mathbf{H}}^*\cdot\hat{\mathbf{B}})\,\mathrm{d}V\right]. \tag{18.34}$$

Met betrekking tot het in $\mathscr{V}_1$ gedissipeerde vermogen maken wij ten aanzien van het in $\mathscr{V}_1$ aanwezige medium onderscheid tussen de volgende gevallen

(1) *Passief medium.* Voor een passief medium geldt $\langle P\rangle_T \leq \langle P_{\text{source}}\rangle_T$, zodat

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T \geq 0 \qquad \text{voor passief medium.} \tag{18.35}$$

(1a) *Dissipatief medium.* Voor een dissipatief medium geldt $\langle P\rangle_T < \langle P_{\text{source}}\rangle_T$, zodat

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T > 0 \qquad \text{voor dissipatief medium.} \tag{18.36}$$

(1b) *Verliesvrij medium.* Voor een verliesvrij medium geldt $\langle P\rangle_T = \langle P_{\text{source}}\rangle_T$, zodat

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T = 0 \qquad \text{voor verliesvrij medium.} \tag{18.37}$$

(2) *Actief medium.* Voor een actief medium geldt $\langle P\rangle_T > \langle P_{\text{source}}\rangle_T$, zodat

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T < 0 \qquad \text{voor actief medium.} \tag{18.38}$$

Een actief medium moet op grond van de wet van behoud van energie langs andere weg worden gestimuleerd om zich in elektromagnetisch opzicht als actief te kunnen gedragen; het bekendste voorbeeld van dit

verschijnsel is de laser (LASER= Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

Voor het geval, dat op het in $\mathscr{V}_1$ aanwezige medium de constitutieve vergelijkingen (18.18) t/m (18.20) van toepassing zijn, kunnen de onder (1), (1a), (1b) en (2) genoemde eigenschappen direct in verband worden gebracht met $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$. Daartoe substitueren wij (18.18) t/m (18.20) in het rechterlid van (18.34) en brengen in rekening, dat $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*$ en $\hat{\mathbf{H}}^*\cdot\hat{\mathbf{H}}$ reëel zijn. Het resultaat is

$$\langle P_{\text{diss}}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\iiint_{\mathscr{V}_1} [\mathrm{Re}(\hat{\sigma}^*)\,(\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*)+\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon}^*)\,(\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*) - \mathrm{Im}(\hat{\mu})\,(\hat{\mathbf{H}}^*\cdot\hat{\mathbf{H}})]\,\mathrm{d}V. \tag{18.39}$$

Daar $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{E}}^*>0$ voor $\hat{\mathbf{E}}\neq\mathbf{0}$ en $\hat{\mathbf{H}}^*\cdot\hat{\mathbf{H}}>0$ voor $\hat{\mathbf{H}}\neq\mathbf{0}$ en de hierboven onder (1), (1a), (1b) of (2) gegeven kwalificatie moet gelden los van de in een gegeven configuratie aanwezige elektromagnetische velden, volgt uit (18.39), dat

$$\mathrm{Re}(\hat{\sigma})\geq 0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})\leq 0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\mu})\leq 0 \qquad \text{voor passief medium,} \tag{18.40}$$

$$\mathrm{Re}(\hat{\sigma})>0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})<0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\mu})<0 \qquad \text{voor dissipatief medium,} \tag{18.41}$$

$$\mathrm{Re}(\hat{\sigma})=0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})=0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\mu})=0 \qquad \text{voor verliesvrij medium,} \tag{18.42}$$

$$\mathrm{Re}(\hat{\sigma})<0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})>0 \text{ en } \mathrm{Im}(\hat{\mu})>0 \qquad \text{voor actief medium.} \tag{18.43}$$

De in (18.40) t/m (18.43) gegeven voorwaarden hebben steeds betrekking op de waarden van $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ bij de gekozen cirkelfrequentie. Indien de voorwaarden voor alle cirkelfrequenties gelden, kunnen wij de desbetreffende kwalificatie ook in het tijddomein van toepassing verklaren. In dit verband moet echter wel worden gewezen op de in Par. 19 te behandelen causaliteitsbetrekkingen.

Opmerking. Terwille van de eenvoud in de notatie zullen wij daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, de aanduiding $\hat{}$ bij de grootheden in het frequentiedomein weglaten. In de paragrafen waar dit gebeurt, zullen wij dit aangeven.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 18.1. In een homogeen gebied van een bepaald medium gelden in het frequentiedomein de volgende constitutieve vergelijkingen: $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\sigma}(\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$, $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\varepsilon}(\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\mu}(\omega)\,\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$, waarin $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ plaatsonafhankelijk zijn. Bewijs, dat $\hat{\rho}=0$, indien $\hat{\sigma}+\mathrm{j}\omega\hat{\varepsilon}\neq 0$. (Aanwijzing: maak gebruik van de Vergelijkingen (18.3) en (18.5).)

Vraagstuk 18.2. Geef de elektromagnetische veldvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking in het frequentiedomein, uitgedrukt in $\hat{\mathbf{E}}$ en $\hat{\mathbf{H}}$, door gebruik te maken van de constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$, $\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega)=\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$.
Antwoord: $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{H}}=(\hat{\sigma}+\mathrm{j}\omega\hat{\varepsilon})\,\hat{\mathbf{E}}$, $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\hat{\mu}\hat{\mathbf{H}}$, $\mathrm{div}(\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{E}})=\hat{\rho}$, $\mathrm{div}(\hat{\mu}\hat{\mathbf{H}})=0$, $\mathrm{div}(\hat{\sigma}\hat{\mathbf{E}})+\mathrm{j}\omega\hat{\rho}=0$.

Vraagstuk 18.3. Waar gaan de in het antwoord van Vraagstuk 18.2 gegeven vergelijkingen in over in een homogeen gebied van het beschouwde medium?
Antwoord: $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{H}}=(\hat{\sigma}+\mathrm{j}\omega\hat{\varepsilon})\,\hat{\mathbf{E}}$, $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\hat{\mu}\hat{\mathbf{H}}$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{E}}=0$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{H}}=0$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{E}}=0$. (Hierbij wordt ondersteld, dat $\hat{\sigma}+\mathrm{j}\omega\hat{\varepsilon}\neq 0$.)

Vraagstuk 18.4. Geef de met de Vergelijkingen (18.1) t/m (18.5) overeenkomende vergelijkingen in het frequentiedomein, indien $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ als complexe tijdfactor wordt gebruikt.
Antwoord: $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{H}}=\hat{\mathbf{J}}-\mathrm{i}\omega\hat{\mathbf{D}}$, $\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{E}}=\mathrm{i}\omega\hat{\mathbf{B}}$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{D}}=\hat{\rho}$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{B}}=0$, $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{J}}-\mathrm{i}\omega\hat{\rho}=0$.

Vraagstuk 18.5. Geef de met Vergelijking (18.27) overeenkomende vergelijking in het frequentiedomein, indien $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ als complexe tijdfactor wordt gebruikt.
Antwoord: $\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{J}}^*+\mathrm{i}\omega\hat{\mathbf{E}}\cdot\hat{\mathbf{D}}^*-\mathrm{i}\omega\hat{\mathbf{H}}^*\cdot\hat{\mathbf{B}}+\mathrm{div}(\hat{\mathbf{E}}\times\hat{\mathbf{H}}^*)=0$.

Vraagstuk 18.6. Geef de voorwaarden waaraan $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ moeten voldoen voor (a) een passief, (b) een dissipatief, (c) een verliesvrij en (d) een actief medium, indien $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ als complexe tijdfactor wordt gebruikt.
Antwoord: (a) $\mathrm{Re}(\hat{\sigma})\geq 0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})\geq 0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\mu})\geq 0$; (b) $\mathrm{Re}(\hat{\sigma})>0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})>0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\mu})>0$; (c) $\mathrm{Re}(\hat{\sigma})=0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})=0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\mu})=0$; (d) $\mathrm{Re}(\hat{\sigma})<0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})<0$ en $\mathrm{Im}(\hat{\mu})<0$.

19. Complexe soortelijke geleiding, permittiviteit en permeabiliteit. Nawerking, causaliteit. De betrekkingen van Kramers en Kronig

In deze paragraaf komen wij terug op de vraag, met welke constitutieve vergelijkingen in het tijddomein de constitutieve vergelijkingen in het frequentiedomein (zie (18.18), (18.19) en (18.20))

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{19.1}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega), \tag{19.2}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\omega) = \hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)\,\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega), \tag{19.3}$$

corresponderen. Om dit vraagstuk aan te pakken, merken wij op, dat producten zoals in de rechterleden van (19.1) t/m (19.3) optreden, kunnen ontstaan als de fouriergetransformeerden van de convolutie van twee functies die in de tijd van voorbijgaande aard zijn. Daarvoor is het nodig, dat $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ als fouriergetransformeerden worden geïnterpreteerd, hetgeen betekent, dat zij voor alle waarden van ω in het interval $-\infty<\omega<\infty$ gedefinieerd moeten zijn. Metingen via sinusvormig met de tijd veranderende $\mathbf{J}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ leveren echter $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ alleen voor waarden van ω in het interval $0\leq\omega<\infty$. Daar het verder voor de hand ligt, dat in het tijddomein de elektromagnetische eigenschappen van een materiaal door *reële functies* worden beschreven, zullen wij de in het interval $0\leq\omega<\infty$ experimenteel bepaalde waarden van $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ voor waarden van ω in het interval $-\infty<\omega<0$ uitbreiden via de betrekkingen

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty, \tag{19.4}$$

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty, \tag{19.5}$$

$$\hat{\mu}(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty, \tag{19.6}$$

die voor $0\leq\omega<\infty$ als definitievergelijking worden opgevat en daarna voor alle reële waarden van ω gelden. Verder wordt zowel op grond van theoretische overwegingen als op grond van de beschikbare experimentele gegevens vermoed, dat $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ tot een *eindige reële limiet* naderen

voor $\omega \to \infty$. Derhalve kunnen wij stellen

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega) = \sigma_\infty(\mathbf{r}), \tag{19.7}$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon_\infty(\mathbf{r}), \tag{19.8}$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\mu}(\mathbf{r},\omega) = \mu_\infty(\mathbf{r}), \tag{19.9}$$

waarin $\sigma_\infty(\mathbf{r})$, $\varepsilon_\infty(\mathbf{r})$ en $\mu_\infty(\mathbf{r})$ reëel zijn. Opgemerkt wordt, dat (19.7), (19.8) en (19.9) in overeenstemming zijn met respectievelijk (19.4), (19.5) en (19.6). Vervolgens stellen wij

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega) = \sigma_\infty(\mathbf{r}) + \hat{\kappa}_c(\mathbf{r},\omega), \tag{19.10}$$

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon_\infty(\mathbf{r}) + \hat{\kappa}_e(\mathbf{r},\omega), \tag{19.11}$$

$$\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega) = \mu_\infty(\mathbf{r}) + \hat{\kappa}_m(\mathbf{r},\omega). \tag{19.12}$$

Voor $\hat{\kappa}_c$, $\hat{\kappa}_e$ en $\hat{\kappa}_m$ geldt op grond van (19.4) t/m (19.6)

$$\hat{\kappa}_c(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\kappa}_c(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty, \tag{19.13}$$

$$\hat{\kappa}_e(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\kappa}_e(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty, \tag{19.14}$$

$$\hat{\kappa}_m(\mathbf{r},-\omega) = \hat{\kappa}_m(\mathbf{r},\omega)^* \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty \tag{19.15}$$

en op grond van (19.7) t/m (19.9)

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\kappa}_c(\mathbf{r},\omega) = 0, \tag{19.16}$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\kappa}_e(\mathbf{r},\omega) = 0, \tag{19.17}$$

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{\kappa}_m(\mathbf{r},\omega) = 0. \tag{19.18}$$

Onder gebruikmaking van (16.29) verkrijgen wij nu als constitutieve vergelijkingen in het tijddomein

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \sigma_\infty(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \int_0^\infty \kappa_c(\mathbf{r},\tau)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{19.19}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_\infty(\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \int_0^\infty \kappa_e(\mathbf{r},\tau)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{19.20}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_\infty(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \int_0^\infty \kappa_m(\mathbf{r},\tau)\mathbf{H}(\mathbf{r},t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{19.21}$$

De grenzen bij de integralen in het rechterlid van (19.19) t/m (19.21) zijn gekozen in overeenstemming met het *causaliteitsbeginsel*. Dit beginsel brengt tot uitdrukking, dat het niet aannemelijk is, dat de fysische toestand van een materiaal nú mede bepaald zou worden door zijn fysische

toekomst; medebepaling door zijn fysische verleden wordt wel aannemelijk geacht. In overeenstemming hiermee doorloopt de variabele τ alleen niet-negatieve waarden. De eerste term in het rechterlid van (19.19) t/m (19.21) beschrijft steeds de instantane reactie van het materiaal; de tweede term beschrijft de zgn. *nawerking*. Vergelijken van (19.19) t/m (19.21) met (10.7) t/m (10.9) leert, dat de eerstgenoemde vergelijkingen als uitbreidingen van de laatstgenoemde kunnen worden beschouwd en wel in die zin, dat met het verschijnsel nawerking rekening wordt gehouden, hetgeen in (10.7) t/m (10.9) niet is gebeurd. De causaliteit van het medium kan men wiskundig ook tot uitdrukking brengen door te stellen

$$\kappa_c(\mathbf{r},\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{voor } -\infty<\tau<0, \tag{19.22}$$

$$\kappa_e(\mathbf{r},\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{voor } -\infty<\tau<0, \tag{19.23}$$

$$\kappa_m(\mathbf{r},\tau) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{voor } -\infty<\tau<0. \tag{19.24}$$

Deze eigenschap heeft echter belangrijke consequenties voor het gedrag van $\hat{\kappa}_c = \hat{\kappa}_c(\mathbf{r},\omega)$, $\hat{\kappa}_e = \hat{\kappa}_e(\mathbf{r},\omega)$ en $\hat{\kappa}_m = \hat{\kappa}_m(\mathbf{r},\omega)$ als functie van ω. Op grond van (16.18) moet namelijk voor $-\infty<\omega<\infty$ gelden

$$\hat{\kappa}_c(\mathbf{r},\omega) = \int_0^\infty \exp(-j\omega\tau)\,\kappa_c(\mathbf{r},\tau)\,d\tau, \tag{19.25}$$

$$\hat{\kappa}_e(\mathbf{r},\omega) = \int_0^\infty \exp(-j\omega\tau)\,\kappa_e(\mathbf{r},\tau)\,d\tau, \tag{19.26}$$

$$\hat{\kappa}_m(\mathbf{r},\omega) = \int_0^\infty \exp(-j\omega\tau)\,\kappa_m(\mathbf{r},\tau)\,d\tau. \tag{19.27}$$

De integralen in het rechterlid definiëren echter regulier-analytische functies van de complexe veranderlijke ω in het complexe halfvlak $-\infty<\mathrm{Im}(\omega)<0$, op voorwaarde dat de integralen $\int_0^\infty |\kappa_c(\mathbf{r},\tau)|\,d\tau$, $\int_0^\infty |\kappa_e(\mathbf{r},\tau)|\,d\tau$ en $\int_0^\infty |\kappa_m(\mathbf{r},\tau)|\,d\tau$ bestaan. Aangezien de gevolgen van deze eigenschap voor alle drie de grootheden $\hat{\kappa}_c$, $\hat{\kappa}_e$ en $\hat{\kappa}_m$ dezelfde zijn, zullen wij bij de hierna volgende wiskundige beschouwingen de indices „c", „e" en „m" weglaten en de analyse vervolgen aan de hand van de functie

$$\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega) = \int_0^\infty \exp(-j\omega\tau)\,\kappa(\mathbf{r},\tau)\,d\tau, \tag{19.28}$$

waarbij ondersteld is, dat $\int_0^\infty |\kappa(\mathbf{r}\,\tau)|\,d\tau$ bestaat. Onder deze voorwaarde definieert (19.28) voor complexe waarden van ω een functie $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)$

die regulier-analytisch is in het halfvlak $-\infty < \mathrm{Im}(\omega) < 0$. Verder geldt voor deze functie

$$|\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)| \to 0 \qquad \text{voor } |\omega| \to \infty, \text{ uniform in } -\infty < \mathrm{Im}(\omega) \leq 0. \tag{19.29}$$

Op grond van deze eigenschappen zijn er, met behulp van de stelling van CAUCHY uit de theorie van de functies met complexe veranderlijke, betrekkingen af te leiden tussen het reële en het imaginaire deel van $\hat{\kappa}$, beschouwd voor *reële* waarden van ω. Om deze betrekkingen af te leiden, gaan wij als volgt te werk.

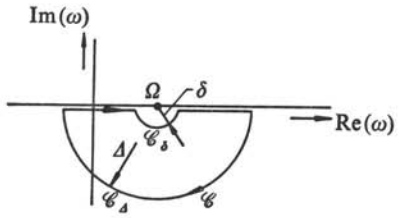


Fig. 25. Integratieweg in het complexe ω-vlak voor het afleiden van de causaliteitsbetrekkingen.

Laat $\omega = \Omega$ een punt op de reële as van het complexe ω-vlak zijn (Fig. 25) en $\mathscr{C}$ de in Fig. 25 aangegeven gesloten integratieweg. Het deel $\mathscr{C}_\Delta$ van $\mathscr{C}$ is een halve cirkel met middelpunt $\omega = \Omega$ en straal Δ, het deel $\mathscr{C}_\delta$ van $\mathscr{C}$ is een halve cirkel met middelpunt $\omega = \Omega$ en straal δ. In de eerste plaats geldt op grond van de stelling van CAUCHY

$$\oint_{\mathscr{C}} \frac{\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega = 0, \tag{19.30}$$

daar $\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)$ en $(\omega-\Omega)^{-1}$ regulier-analytisch zijn in het begrensde gebied binnen $\mathscr{C}$. Verder geldt in verband met (19.29)

$$\int_{\mathscr{C}_\Delta} \frac{\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \to 0 \qquad \text{voor } \Delta \to \infty. \tag{19.31}$$

Vervolgens geldt

$$\int_{\mathscr{C}_\delta} \frac{\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \to \pi \mathrm{j} \hat{\kappa}(\mathbf{r},\Omega) \qquad \text{voor } \delta \to 0. \tag{19.32}$$

Combineren van (19.30) met (19.31) en (19.32) levert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega + \pi \mathrm{j}\hat{\kappa}(\mathbf{r},\Omega) = 0, \tag{19.33}$$

waarin $\int$ de hoofdwaarde van de integraal volgens CAUCHY aangeeft; deze is gedefinieerd als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \mathrm{d}\omega = \lim_{\Delta\to\infty,\,\delta\to 0}\left(\int_{-\Delta}^{\Omega-\delta} \ldots \mathrm{d}\omega + \int_{\Omega+\delta}^{\Omega+\Delta} \ldots \mathrm{d}\omega\right). \tag{19.34}$$

In (19.33) gaan wij nu het reële en het imaginaire deel van de beide erin voorkomende termen bepalen. Daartoe stellen wij

$$\hat{\kappa}(\mathbf{r},\omega) = \kappa'(\mathbf{r},\omega) - \mathrm{j}\kappa''(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor reële } \omega, \tag{19.35}$$

waarin $\kappa'(\mathbf{r},\omega)$ en $\kappa''(\mathbf{r},\omega)$ reëel zijn en op grond van (19.28) gegeven door

$$\kappa'(\mathbf{r},\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega\tau)\,\kappa(\mathbf{r},\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{19.36}$$

$$\kappa''(\mathbf{r},\omega) = \int_0^{\infty} \sin(\omega\tau)\,\kappa(\mathbf{r},\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{19.37}$$

Uit (19.36) volgt onmiddellijk

$$\kappa'(\mathbf{r},-\omega) = \kappa'(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty \tag{19.38}$$

en uit (19.37)

$$\kappa''(\mathbf{r},-\omega) = -\kappa''(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor } -\infty<\omega<\infty. \tag{19.39}$$

Deze eigenschappen zijn in overeenstemming met (19.13) t/m (19.15). Substitutie van (19.35) in (19.33) leidt tot

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa'(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega + \pi\kappa''(\mathbf{r},\Omega) = 0 \tag{19.40}$$

en

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa''(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega + \pi\kappa'(\mathbf{r},\Omega) = 0, \tag{19.41}$$

ofwel

$$\kappa''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa'(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty \tag{19.42}$$

en

$$\kappa'(\mathbf{r},\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa''(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty. \tag{19.43}$$

Door gebruikmaking van (19.38) en (19.39) zijn (19.42) en (19.43) te herleiden tot

$$\kappa''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\kappa'(\mathbf{r},\omega)\,\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty \tag{19.44}$$

en

$$\kappa'(\mathbf{r},\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\kappa''(\mathbf{r},\omega)\,\omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty. \tag{19.45}$$

De vergelijkingen (19.42) en (19.43) of (19.44) en (19.45) staan bekend als de *causaliteitsbetrekkingen* of als de *betrekkingen van* KRAMERS *en* KRONIG. Zij worden door het experiment bevestigd en hierdoor is het veronderstelde causaal zijn van het elektromagnetische gedrag van een materiaal bewezen. De vergelijkingen (19.19) t/m (19.21) kunnen derhalve als correcte uitbreidingen van (10.7) t/m (10.9) worden beschouwd.

Nu is langs functietheoretische weg eenvoudig te bewijzen, dat (zie de herleiding van (19.30))

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega = 0 \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.46}$$

zodat (19.42) en (19.43) kunnen worden herschreven als

$$\kappa''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa'(\mathbf{r},\omega)-\kappa'(\mathbf{r},\Omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty \tag{19.47}$$

en

$$\kappa'(\mathbf{r},\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa''(\mathbf{r},\omega)-\kappa''(\mathbf{r},\Omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty; \tag{19.48}$$

hierin is het deel van de integralen rondom $\omega=\Omega$ geen hoofdwaardeintegraal meer, hetgeen voordelen oplevert bij het numeriek bepalen van de integralen. Verder volgt uit (19.46)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega = 0 \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty, \tag{19.49}$$

zodat (19.44) en (19.45) kunnen worden herschreven als

$$\kappa''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\kappa'(\mathbf{r},\omega)-\kappa'(\mathbf{r},\Omega)]\,\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty \tag{19.50}$$

en

$$\kappa'(\mathbf{r},\Omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\kappa''(\mathbf{r},\omega)-\Omega\kappa''(\mathbf{r},\Omega)}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty; \tag{19.51}$$

hierin treden geen hoofdwaarde-integralen meer op, hetgeen voordelen oplevert bij het numeriek bepalen van de integralen. In de vorm (19.50) en (19.51) staan de causaliteitsbetrekkingen ook wel bekend als de *betrekkingen van* BODE.

Volledigheidshalve geven wij hieronder een overzicht van de causaliteitsbetrekkingen voor de complexe soortelijke geleiding, de complexe permittiviteit en de complexe permeabiliteit zelf. Hierbij beperken wij ons tot de betrekkingen die uit (19.42) en (19.43), of (19.44) en (19.45) volgen.

(a) *Complexe soortelijke geleiding*

Voor de complexe soortelijke geleiding stellen wij

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r},\omega) = \sigma'(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{j}\sigma''(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor reële } \omega. \tag{19.52}$$

Uit (19.10), (19.35) en (19.52) volgt, dat $\kappa_c'(\mathbf{r},\omega)=\sigma'(\mathbf{r},\omega)-\sigma_\infty(\mathbf{r})$ en $\kappa_c''(\mathbf{r},\omega)=\sigma''(\mathbf{r},\omega)$. Hiermee verkrijgen wij de betrekkingen

$$\sigma''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{1}{\pi}\int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma'(\mathbf{r},\omega)-\sigma_\infty(\mathbf{r})}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.53}$$

$$\sigma'(\mathbf{r},\omega)-\sigma_\infty(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi}\int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma''(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.54}$$

of de betrekkingen

$$\sigma''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{2}{\pi}\int\!\!\!\!\!\!-_0^\infty \frac{[\sigma'(\mathbf{r},\omega)-\sigma_\infty(\mathbf{r})]\,\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty, \tag{19.55}$$

$$\sigma'(\mathbf{r},\Omega)-\sigma_\infty(\mathbf{r})=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma''(\mathbf{r},\omega)\,\omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty. \tag{19.56}$$

(b) *Complexe permittiviteit*

Voor de complexe permittiviteit stellen wij

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{r},\omega)=\varepsilon'(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{j}\varepsilon''(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor reële } \omega. \tag{19.57}$$

Uit (19.11), (19.35) en (19.57) volgt, dat $\kappa_{\mathrm{e}}'(\mathbf{r},\omega)=\varepsilon'(\mathbf{r},\omega)-\varepsilon_\infty(\mathbf{r})$ en $\kappa_{\mathrm{e}}''(\mathbf{r},\omega)=\varepsilon''(\mathbf{r},\omega)$. Hiermee verkrijgen wij de betrekkingen

$$\varepsilon''(\mathbf{r},\Omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon'(\mathbf{r},\omega)-\varepsilon_\infty(\mathbf{r})}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.58}$$

$$\varepsilon'(\mathbf{r},\Omega)-\varepsilon_\infty(\mathbf{r})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon''(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.59}$$

of de betrekkingen

$$\varepsilon''(\mathbf{r},\Omega)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\varepsilon'(\mathbf{r},\omega)-\varepsilon_\infty(\mathbf{r})]\,\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty, \tag{19.60}$$

$$\varepsilon'(\mathbf{r},\Omega)-\varepsilon_\infty(\mathbf{r})=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon''(\mathbf{r},\omega)\,\omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty. \tag{19.61}$$

(c) *Complexe permeabiliteit*

Voor de complexe permeabiliteit stellen wij

$$\hat{\mu}(\mathbf{r},\omega)=\mu'(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{j}\mu''(\mathbf{r},\omega) \qquad \text{voor reële } \omega. \tag{19.62}$$

Uit (19.12), (19.35) en (19.62) volgt, dat $\kappa_{\mathrm{m}}'(\mathbf{r},\omega)=\mu'(\mathbf{r},\omega)-\mu_\infty(\mathbf{r})$ en $\kappa_{\mathrm{m}}''(\mathbf{r},\omega)=\mu''(\mathbf{r},\omega)$. Hiermee verkrijgen wij de betrekkingen

$$\mu''(\mathbf{r},\Omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mu'(\mathbf{r},\omega)-\mu_\infty(\mathbf{r})}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.63}$$

$$\mu'(\mathbf{r},\Omega)-\mu_\infty(\mathbf{r})=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mu''(\mathbf{r},\omega)}{\omega-\Omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } -\infty<\Omega<\infty, \tag{19.64}$$

of de betrekkingen

$$\mu''(\mathbf{r},\Omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\mu'(\mathbf{r},\omega)-\mu_\infty(\mathbf{r})]\,\Omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty, \tag{19.65}$$

$$\mu'(\mathbf{r},\Omega) - \mu_\infty(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mu''(\mathbf{r},\omega)\,\omega}{\omega^2-\Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0<\Omega<\infty. \tag{19.66}$$

De causaliteitsbetrekkingen leiden tot een aantal wetmatigheden in het gedrag van het reële en het imaginaire deel van $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ of $\hat{\mu}$ als functie van de frequentie. Het eenvoudigste voorbeeld van zo'n wetmatigheid is het volgende. Laat gegeven zijn, dat $\sigma'(\mathbf{r},\omega_1) \neq \sigma'(\mathbf{r},\omega_2)$ voor $\omega_1 \neq \omega_2$, dan is $\sigma''(\mathbf{r},\omega) \not\equiv 0$. Het bewijs wordt door tegenspraak geleverd. Substitueer nl. $\sigma''(\mathbf{r},\omega) \equiv 0$ in (19.54), dan volgt daaruit $\sigma'(\mathbf{r},\Omega) = \sigma_\infty(\mathbf{r})$, dus onafhankelijk van Ω voor alle Ω; dit is in tegenspraak met het gegevene. Een afhankelijkheid van de frequentie van σ' moet dus gepaard gaan met een van nul verschillende σ'' in één of ander frequentie-interval. Soortgelijke conclusies gelden met betrekking tot het reële en imaginaire deel van $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$.

Tot slot merken wij nog op, dat de causaliteitsbetrekkingen van toepassing zijn op zowel passieve als actieve materiële media. Voor de beperkingen waaraan $\mathrm{Re}(\hat{\sigma})$, $\mathrm{Im}(\hat{\varepsilon})$ en $\mathrm{Im}(\hat{\mu})$ in verband hiermee onderworpen kunnen zijn, verwijzen wij naar het in Par. 18, onder (d) besprokene.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 19.1. Het uitgangspunt voor de klassieke theorie van het transport van een bepaald type ladingdrager in een vaste stof onder invloed van een elektrisch veld $\mathbf{E}$ is een „gemiddelde" bewegingsvergelijking voor deze ladingdrager. In deze vergelijking worden de volgende krachten in rekening gebracht: de traagheidskracht als gevolg van de beweging van de ladingdrager, een „gemiddelde" overdracht van impulsie per eenheid van tijd door (volkomen onelastisch onderstelde) botsingen met het atoomrooster en de elektrische kracht. (De magnetische kracht is verwaarloosbaar klein bij afwezigheid van een uitwendig magnetisch veld.) De „gemiddelde" bewegingsvergelijking luidt: $m\mathrm{d}_t\mathbf{v}_{\mathrm{conv}} + m\nu\mathbf{v}_{\mathrm{conv}} = q\mathbf{E}$, waarin ν de botsingsfrequentie voorstelt. De (drift)stroomdichtheid $\mathbf{J}_{\mathrm{drift}}$ is gegeven door $\mathbf{J}_{\mathrm{drift}} = Nq\mathbf{v}_{\mathrm{conv}}$. (a) Leid de uitdrukking af voor $\hat{\sigma} = \sigma' - \mathrm{j}\sigma''$ in de onderstelling, dat in een sinusvormig met de tijd veranderend elektrisch veld ook de convectiesnelheid met voldoende benadering sinusvormig in de tijd is. (b) Bepaal de plaats en de aard van de singulariteit van $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\omega)$ in het complexe ω-vlak. (c) Bepaal met behulp van Vergelijking (19.28) de grootheid $\kappa_c = \kappa_c(\tau)$.

Antwoord: (a) $\hat{\sigma} = (Nq^2/m)(\nu + j\omega)^{-1}$, $\sigma' = Nq^2\nu/m(\nu^2+\omega^2)$, $\sigma'' = Nq^2\omega/m(\nu^2+\omega^2)$; (b) enkelvoudige pool bij $\omega = j\nu$, dus in het halfvlak $0 < \mathrm{Im}(\omega) < \infty$; (c) $\kappa_e(\tau) = (Nq^2/m) \times \exp(-\nu\tau)$ voor $0 \leq \tau < \infty$. (Opmerking: indien verschillende typen ladingdragers tot de driftstroomdichtheid bijdragen, dienen de bijdragen van de afzonderlijke typen ladingdragers tot de soortelijke geleiding bij elkaar te worden opgeteld.)

Vraagstuk 19.2. Het uitgangspunt voor de klassieke theorie van de elektrische polarisatie van een vaste stof onder invloed van een elektrisch veld **E** is een „gemiddelde" bewegingsvergelijking voor de elektronenwolk van een atoom. In deze vergelijking worden de volgende krachten in rekening gebracht: de traagheidskracht als gevolg van de beweging van de elektronenwolk, een „gemiddelde" wrijvingskracht die evenredig is met de snelheid van de elektronenwolk, de terugdrijvende kracht naar de evenwichtstoestand die wordt geleverd door de coulombkracht die de atoomkern op de elektronenwolk uitoefent, en de elektrische kracht. (De magnetische kracht is verwaarloosbaar klein bij afwezigheid van een uitwendig magnetisch veld.) De „gemiddelde" bewegingsvergelijking voor de elektronenwolk luidt: $Zm[\mathrm{d}_t^2\langle \mathbf{u}\rangle + \nu \mathrm{d}_t\langle \mathbf{u}\rangle + \omega_0^2\langle \mathbf{u}\rangle] = -Ze\mathbf{E}$, waarin Z het atoomnummer, m de massa van één elektron, $-e$ de lading van een elektron, ν de dempingscoëfficiënt, ω_0 de resonantiefrequentie van het atoom en $\mathbf{u}$ de vectoriële verplaatsing van het ladingsmiddelpunt van de elektronenwolk ten opzichte van de puntvormig onderstelde atoomkern voorstelt. De elektrische polarisatie is gegeven door $\mathbf{P} = -Ne\langle \mathbf{u}\rangle$. (a) Bepaal met behulp van het in Vraagstuk 8.3 verkregen antwoord ω_0^2, in de onderstelling, dat de terugdrijvende kracht uitsluitend door de coulombkracht wordt veroorzaakt. (b) Leid de uitdrukking af voor $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$ in de onderstelling, dat in een sinusvormig met de tijd veranderend elektrisch veld ook de uitwijking uit de evenwichtsstand met voldoende benadering sinusvormig in de tijd is. (c) Bepaal de plaats en de aard van de singulariteiten van $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\omega)$ in het complexe ω-vlak. (d) Bepaal met behulp van Vergelijking (19.28) de grootheid $\kappa_e = \kappa_e(\tau)$.
Antwoord: (a) $\omega_0^2 = Ze^2/4\pi\varepsilon_0 a^3 m$; (b) $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0[1 + (Ne^2/m\varepsilon_0)\ (-\omega^2 + j\omega\nu + \omega_0^2)^{-1}]$, $\varepsilon' = \varepsilon_0[1 + (Ne^2/m\varepsilon_0)\ (\omega_0^2 - \omega^2)\ \{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\nu^2\}^{-1}]$, $\varepsilon'' = (Ne^2/m)\,\omega\nu\,[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\nu^2]^{-1}$; (c) enkelvoudige polen bij $\omega = \frac{1}{2}j\nu + (\omega_0^2 - \nu^2/4)^{\frac{1}{2}}$ en $\omega = \frac{1}{2}j\nu - (\omega_0^2 - \nu^2/4)^{\frac{1}{2}}$, dus in het halfvlak $0 < \mathrm{Im}(\omega) < \infty$. (d) $\kappa_e(\tau) = (Ne^2/m)\,(\omega_0^2 - \nu^2/4)^{-\frac{1}{2}}\ \exp(-\frac{1}{2}\nu\tau) \times \sin[(\omega_0^2 - \nu^2/4)^{\frac{1}{2}}\tau)]$ voor $0 \leq \tau < \infty$. (Opmerking: bij de aanwezigheid van verschillende soorten atomen dienen de bijdragen daarvan tot de elektrische polarisatie en derhalve tot de complexe susceptibiliteit bij elkaar te worden opgeteld.)

Vraagstuk 19.3. Van de in het frequentiedomein gedefinieerde complexe functie $\rho = \rho(\omega)$ is gegeven, dat zij met een reële functie in het tijddomein correspondeert, dat $\rho = \rho(\omega)$ regulier-analytisch is in het halfvlak $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ en dat $\rho \neq 0$ voor $\mathrm{Im}(\omega) \leq 0$. Verder nadert ρ tot een eindige limiet ρ_∞ voor $|\omega| \to \infty$ in $\mathrm{Im}(\omega) \leq 0$. Stel $\rho = |\rho| \exp[-j\arg(\rho)]$ en $\rho_\infty = |\rho_\infty| \exp[-j\arg(\rho_\infty)]$ en leid de betrekkingen van KRAMERS en KRONIG af voor $\ln|\rho/\rho_\infty|$ en $\arg(\rho) - \arg(\rho_\infty)$. (Aanwijzing: merk op, dat $\ln(\rho/\rho_\infty) = \ln|\rho/\rho_\infty| - j\arg(\rho) + j\arg(\rho_\infty)$.)
Antwoord:

$$\arg(\rho) - \arg(\rho_\infty) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln|\rho/\rho_\infty|\,\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left|\frac{\omega-\Omega}{\omega+\Omega}\right|\,\mathrm{d}\ln|\rho/\rho_\infty| \qquad \text{voor } 0 < \Omega < \infty,$$

$$\ln|\rho/\rho_\infty| = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\arg(\rho) - \arg(\rho_\infty)]\,\omega}{\omega^2 - \Omega^2}\,\mathrm{d}\omega \qquad \text{voor } 0 < \Omega < \infty.$$

(Merk op, dat de bijdrage van $\ln|(\omega-\Omega)/(\omega+\Omega)|$ tot de integraal in het eerste resultaat voornamelijk afkomstig is van de omgeving van $\omega=\Omega$ en dat $\mathrm{d}\ln|\rho/\rho_\infty|$ alleen een bijdrage levert daar waar $\ln|\rho/\rho_\infty|$ *verandert*.)

Vraagstuk 19.4. Geef het bewijs van Vergelijking (19.29) door voor reële waarden van ω en voor begrensde waarden van $\mathrm{Im}(\omega)$ van de stelling van RIEMANN-LEBESGUE (zie blz. 134) gebruik te maken en voor $\mathrm{Im}(\omega)\to-\infty$ rekening te houden met het gedrag van de exponentiële functie in de integrand van het rechterlid van Vergelijking (19.28).

20. Eendimensionale elektromagnetische golven in vacuüm (analyse in het tijddomein)

In deze paragraaf bestuderen wij de eigenschappen van eendimensionale elektromagnetische golven in vacuüm. Daar vacuüm geen dispersie (zie Par. 21) vertoont, kan de analyse worden uitgevoerd in het tijddomein. In een bronvrij gebied in vacuüm voldoen $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ aan de partiële differentiaalvergelijkingen (zie (7.1) en (7.2))

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H}-\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}=\mathbf{0}, \tag{20.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E}+\mu_0\partial_t\mathbf{H}=\mathbf{0}, \tag{20.2}$$

terwijl verder moet gelden (zie (7.6) en (7.7))

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=0, \tag{20.3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0. \tag{20.4}$$

Wij proberen oplossingen van deze vergelijkingen te construeren die — ofschoon zij in de driedimensionale ruimte optreden en hun vectoriële karakter behouden — wat de afhankelijkheid van de plaats betreft, slechts in één vaste richting veranderen en in elk plat vlak loodrecht op deze richting geen verandering vertonen. Daarnaast speelt natuurlijk de afhankelijkheid van de tijd een rol. De bedoelde vaste richting karakteriseren wij door de constante eenheidsvector $\mathbf{a}$, waarvoor dus geldt

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=1. \tag{20.5}$$

Laat $\mathbf{r}$ wederom de plaatsvector van een waarnemer in de ruimte aangeven, dan treedt de plaatsafhankelijkheid van de gezochte veldgrootheden op via de combinatie $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}$, hetgeen een scalaire variabele is. Daar in (20.1) en (20.2) de partiële afgeleiden naar x, y, z en t op min of meer gelijke wijze voorkomen, ligt het voor de hand om oplossingen te zoeken die op min of meer gelijke wijze van t als van x, y en z afhangen. Aan een dergelijke voorwaarde voldoet de combinatie

$$u=t-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/v, \tag{20.6}$$

waarin v een nader te bepalen constante is. Wij stellen nu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u) \tag{20.7}$$

en

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(u) \tag{20.8}$$

en onderzoeken de voorwaarden waaronder (20.7) en (20.8) aan (20.1) t/m (20.4) kunnen voldoen. Met gebruikmaking van (20.6) verkrijgt men

$$\partial_t \mathbf{E} = \partial_u \mathbf{E}, \tag{20.9}$$

$$\partial_x \mathbf{E} = (\partial_u \mathbf{E})\partial_x u = -(a_x/v)\partial_u \mathbf{E}, \tag{20.10}$$

$$\partial_y \mathbf{E} = (\partial_u \mathbf{E})\partial_y u = -(a_y/v)\partial_u \mathbf{E}, \tag{20.11}$$

$$\partial_z \mathbf{E} = (\partial_u \mathbf{E})\partial_z u = -(a_z/v)\partial_u \mathbf{E}. \tag{20.12}$$

Door passende combinaties te nemen, verkrijgt men uit (20.10) t/m (20.12)

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -v^{-1}\mathbf{a}\times\partial_u \mathbf{E} \tag{20.13}$$

en

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = -v^{-1}\mathbf{a}\cdot\partial_u \mathbf{E}. \tag{20.14}$$

Overeenkomstige resultaten gelden voor de partiële afgeleiden van $\mathbf{H}$. Substitutie van de verkregen resultaten in (20.1) t/m (20.4) leidt tot

$$\mathbf{a}\times\partial_u \mathbf{H} + v\varepsilon_0 \partial_u \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{20.15}$$

$$\mathbf{a}\times\partial_u \mathbf{E} - v\mu_0 \partial_u \mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{20.16}$$

$$\mathbf{a}\cdot\partial_u \mathbf{E} = 0, \tag{20.17}$$

$$\mathbf{a}\cdot\partial_u \mathbf{H} = 0. \tag{20.18}$$

Elimineren van $\partial_u \mathbf{H}$ uit (20.15) en (20.16) en gebruikmaken van (20.17) leidt tot

$$(-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + v^2\varepsilon_0\mu_0)\partial_u \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{20.19}$$

Een niet van u afhankelijke bijdrage tot $\mathbf{E}$ buiten beschouwing latend (en daarmee $\partial_u \mathbf{E} \not\equiv \mathbf{0}$ onderstellend), volgt uit (20.19) de voorwaarde

$$v = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}} = c_0. \tag{20.20}$$

Laten wij tevens een niet van u afhankelijke bijdrage tot $\mathbf{H}$ buiten beschouwing, dan volgt uit (20.15) t/m (20.18), met inachtneming van (20.20):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{H} + c_0\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{20.21}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{E}-c_0\mu_0\mathbf{H}=\mathbf{0}, \tag{20.22}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}=0, \tag{20.23}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{H}=0. \tag{20.24}$$

Alvorens het elektromagnetische veld van de gedaante

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(u)=\mathbf{E}[t-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/c_0] \tag{20.25}$$

en

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}(u)=\mathbf{H}[t-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/c_0] \tag{20.26}$$

te interpreteren, leiden wij nog een aantal eigenschappen af waaraan de functies $\mathbf{E}=\mathbf{E}(u)$ en $\mathbf{H}=\mathbf{H}(u)$ op grond van (20.21) t/m (20.24) moeten voldoen. Scalaire vermenigvuldiging van (20.21) met $\mathbf{H}$ of van (20.22) met $\mathbf{E}$ levert

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0. \tag{20.27}$$

Door (20.21) vectorieel met $\mathbf{H}$ te vermenigvuldigen en van (20.24) gebruik te maken, verkrijgen wij

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}=c_0\mu_0(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\mathbf{a}. \tag{20.28}$$

Door (20.22) vectorieel met $\mathbf{E}$ te vermenigvuldigen en van (20.23) gebruik te maken, verkrijgen wij

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}=c_0\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{a}. \tag{20.29}$$

Uit (20.28) en (20.29) volgt

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})=\tfrac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}). \tag{20.30}$$

Voor de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ is derhalve te schrijven

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=2c_0\,\tfrac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\mathbf{a}=2c_0\,\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{a}\\&=c_0[\tfrac{1}{2}\mu_0(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})+\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})]\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{20.31}$$

De tot nu toe verkregen resultaten zullen eerst worden besproken.

Het door (20.25) en (20.26) gegeven elektromagnetische veld stelt een *vlakke, lopende golf* voor. Dit blijkt door te letten op de oppervlakken in de ruimte waar $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ als functie van de tijd hetzelfde verloop hebben; deze zijn gegeven door $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=$ constante, d.w.z. het zijn *platte vlakken* loodrecht op $\mathbf{a}$. De richting van de normaal op de genoemde oppervlakken heet de voortplantingsrichting van de golf; voor de beschouwde vlakke golf is derhalve $\mathbf{a}$ de *eenheidsvector in de voortplantingsrichting*. De voortplantingssnelheid van de golf wordt gevonden door de snelheid te bepalen waarmee een waarnemer zich in de voortplantingsrichting

moet bewegen om geen verandering van het veld waar te nemen. Laat $\Delta\mathbf{r}$ de weg zijn die de waarnemer in het tijdinterval Δt aflegt, dan moeten op grond van (20.25) en (20.26) de grootheden $\Delta\mathbf{r}$ en Δt aan de vergelijking $t+\Delta t-[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})/c_0] = t-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})/c_0$ voldoen. In de limiet $\Delta t\to 0$ volgt hieruit

$$\mathbf{a}\cdot \mathrm{d}_t\mathbf{r} = c_0 . \tag{20.32}$$

Daar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 1$ en $\mathrm{d}_t\mathbf{r}$ de snelheid van de waarnemer voorstelt, is de snelheid van de waarnemer in de richting $\mathbf{a}$ gelijk aan c_0: de *voortplantingssnelheid* van een vlakke, lopende, elektromagnetische golf in het vacuüm is dus gelijk aan $c_0 \simeq 2.9979\times 10^8$ meter/seconde. Op grond van (20.23) en (20.24) staan $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ in elk punt van het beschouwde gebied en op elk tijdstip in het beschouwde tijdinterval loodrecht op de voortplantingsrichting: de vlakke, lopende elektromagnetische golf is dus *transversaal*. Bovendien staan op grond van (20.27) de vectoren $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ loodrecht op elkaar en vormen $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ en $\mathbf{a}$ op grond van (20.28) en (20.29) een onderling loodrecht, rechts-cyclisch aan elkaar toegevoegd stelsel, daar $c_0\mu_0(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) \geq 0$ en $c_0\varepsilon_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) \geq 0$ (Fig. 26).

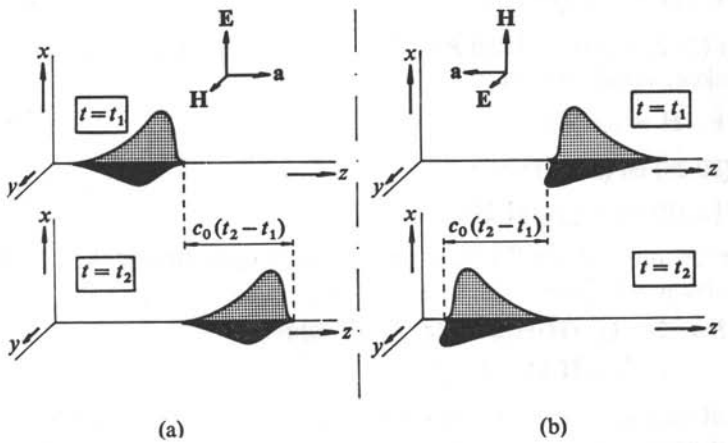


Fig. 26. Eendimensionale, elektromagnetische golven in vacuüm (analyse in het tijddomein): (a) golf in de positieve z-richting, (b) golf in de negatieve z-richting.

De oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom (vector van POYNTING) is op grond van (20.31) gericht langs de voortplantingsrichting van de vlakke golf; in grootte is de vector van POYNTING gelijk aan het product van de voortplantingssnelheid van de golf en de ruimtelijke

dichtheid van de totale elektromagnetische veldenergie. Men kan dus zeggen, dat de beschouwde vlakke golf de totale elektromagnetische veldenergie met de snelheid c_0 in zijn voortplantingsrichting transporteert. Verder is op grond van (20.30) de ruimtelijke dichtheid van de elektrische veldenergie in de golf gelijk aan de ruimtelijke dichtheid van de magnetische veldenergie.

De grootte van $\mathbf{E}$ is op iedere plaats en op ieder tijdstip evenredig met de grootte van $\mathbf{H}$. De evenredigheidsfactor volgt uit (20.21) en (20.22) door deze te herschrijven als

$$\mathbf{E} = Z_0(\mathbf{H}\times\mathbf{a}), \tag{20.33}$$

$$\mathbf{H} = Y_0(\mathbf{a}\times\mathbf{E}). \tag{20.34}$$

Hierin heet

$$Z_0 \overset{\text{def}}{=\!=} (\mu_0/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} \tag{20.35}$$

de *golfimpedantie* van de lopende, vlakke golf in vacuüm en

$$Y_0 \overset{\text{def}}{=\!=} (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} \tag{20.36}$$

de *golfadmittantie* van de lopende, vlakke golf in vacuüm ($Y_0Z_0 = 1$). Substitutie van de waarden $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ henry/meter en $\varepsilon_0 \simeq 8.8544 \times 10^{-12}$ farad/meter in (20.35) geeft

$$Z_0 \simeq 376.73 \text{ ohm}. \tag{20.37}$$

Door $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ of $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ op een vaste plaats als functie van de tijd waar te nemen, verkrijgt men de *golfvorm* van de vlakke lopende golf; deze is invariant en wordt vastgelegd door $\mathbf{E}$ of $\mathbf{H}$ op een bepaalde plaats, b.v. in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, als functie van de tijd voor te schrijven.

In het algemeen beschrijft het „eindpunt" van de vector $\mathbf{E}$ (en dus ook het „eindpunt" van de vector $\mathbf{H}$) in een plat vlak loodrecht op de voortplantingsrichting (b.v. het platte vlak $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=0$) als functie van de tijd een grillige figuur. Een eenvoudig geval treedt op, indien $\mathbf{E}$ (en dus ook $\mathbf{H}$) als functie van de tijd naar richting constant blijft en alleen in grootte varieert; de elektrische veldsterkte (en dus ook de magnetische veldsterkte) heet dan *lineair gepolariseerd* (ook voor niet-sinusvormige trillingen). Kortweg zegt men ook wel, dat de golf dan lineair gepolariseerd is. Het is duidelijk, dat iedere lopende, vlakke golf kan worden geschreven als de superpositie van twee lineair gepolariseerde golven. Om dit in te zien, kan men van een Cartesiaans coördinatenstelsel gebruik maken. Laat de positieve z-as van dit stelsel samenvallen met de voortplantingsrichting, dan is een willekeurige in de positieve z-richting lopende, vlakke golf op te vatten als een superpositie van een lineair gepo-

lariseerde golf waarvan alleen E_x en H_y van nul verschillen en een lineair gepolariseerde golf waarvan alleen E_y en H_x van nul verschillen.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 20.1. Schrijf de Vergelijkingen (20.25), (20.26), (20.21) t/m (20.24) en (20.31) uit in Cartesiaanse componenten voor het geval, dat $\mathbf{a} = \mathbf{i}_z$.
Antwoord: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t-z/c_0)$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t-z/c_0)$; $E_x = Z_0 H_y$; $E_y = -Z_0 H_x$; $E_z = 0$; $H_z = 0$; $\mathbf{S} = 2c_0 \frac{1}{2}\mu_0(H_x^2+H_y^2)\mathbf{i}_z = 2c_0 \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_x^2+E_y^2)\mathbf{i}_z$.

Vraagstuk 20.2. Schrijf de Vergelijkingen (20.25), (20.26), (20.21) t/m (20.24) en (20.31) uit in Cartesiaanse componenten voor het geval, dat $\mathbf{a} = -\mathbf{i}_z$.
Antwoord: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t+z/c_0)$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t+z/c_0)$; $E_x = -Z_0 H_y$; $E_y = Z_0 H_x$; $E_z = 0$; $H_z = 0$; $\mathbf{S} = -2c_0 \frac{1}{2}\mu_0(H_x^2+H_y^2)\mathbf{i}_z = -2c_0 \frac{1}{2}\varepsilon_0(E_x^2+E_y^2)\mathbf{i}_z$.

Vraagstuk 20.3. Van een in de positieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{E}(0,t) = f(t)\mathbf{i}_x + g(t)\mathbf{i}_y$. Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = f(t-z/c_0)\mathbf{i}_x + g(t-z/c_0)\mathbf{i}_y$; $\mathbf{H} = -Y_0 g(t-z/c_0)\mathbf{i}_x + Y_0 f(t-z/c_0)\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 20.4. Van een in de negatieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{H}(0,t) = f(t)\mathbf{i}_x + g(t)\mathbf{i}_y$. Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = -Z_0 g(t+z/c_0)\mathbf{i}_x + Z_0 f(t+z/c_0)\mathbf{i}_y$; $\mathbf{H} = f(t+z/c_0)\mathbf{i}_x + g(t+z/c_0)\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 20.5. Bepaal de bewegingsvergelijking voor een geladen deeltje met rustmassa m_0 en elektrische lading q, dat zich in een lopende, vlakke golf in vacuüm bevindt.
Antwoord: $\mathrm{d}_t\{m_0\mathbf{v}/[1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})/c_0^2]^{\frac{1}{2}}\} = q\mathbf{E} + q[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\mathbf{E}]/c_0$. (Merk op, dat magnetische kracht = Orde $[(v/c_0) \times$ elektrische kracht$]$.)

Vraagstuk 20.6. Van een in de positieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{E}(0,t) = \delta(t)\mathbf{i}_x$. Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = \delta(t-z/c_0)\mathbf{i}_x$; $\mathbf{H} = Y_0\delta(t-z/c_0)\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 20.7. Van een in de positieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{E}(0,t) = (\omega_0 t)^{-1}\sin(\omega_0 t)\mathbf{i}_y$. Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = [\omega_0(t-z/c_0)]^{-1}\sin[\omega_0(t-z/c_0)]\mathbf{i}_y$; $\mathbf{H} = -Y_0[\omega_0(t-z/c_0)]^{-1} \times \sin[\omega_0(t-z/c_0)]\mathbf{i}_x$.

Vraagstuk 20.8. Van een in de negatieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{H}(0,t) = \pi^{-\frac{1}{4}}a^{-1}\exp(-t^2/a^2)\mathbf{i}_y$. Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = -Z_0\pi^{-\frac{1}{4}}a^{-1}\exp[-(t+z/c_0)^2/a^2]\mathbf{i}_x$; $\mathbf{H} = \pi^{-\frac{1}{4}}a^{-1}\exp[-(t+z/c_0)^2/a^2]\mathbf{i}_y$.

Vraagstuk 20.9. Van een in de negatieve z-richting lopende, eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven, dat $\mathbf{H}(0,t) = \varepsilon(t)\mathbf{i}_x$, waarin $\varepsilon(t)$ de eenheidsstapfunctie voorstelt ($\varepsilon(t) = 0$ voor $-\infty < t < 0$, $\varepsilon(0) = \frac{1}{2}$, $\varepsilon(t) = 1$ voor $0 < t < \infty$). Bepaal $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ voor $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.
Antwoord: $\mathbf{E} = Z_0\varepsilon(t+z/c_0)\mathbf{i}_y$; $\mathbf{H} = \varepsilon(t+z/c_0)\mathbf{i}_x$.

21. Eendimensionale elektromagnetische golven in het frequentiedomein. Verstrooiingsmatrix en overdrachtsmatrix van een uniforme sectie van een medium

In deze paragraaf bestuderen wij de eigenschappen van eendimensionale elektromagnetische golven in het frequentiedomein*. Als complexe tijdfactor gebruiken wij $\exp(j\omega t)$, waarin j de imaginaire eenheid, ω de cirkelfrequentie en t de tijd voorstelt. Bij eendimensionale golven hangen de elektromagnetische veldvectoren verder slechts van één enkele ruimtelijke Cartesiaanse coördinaat af; hiervoor kiezen wij de z-coördinaat. Als gevolg hiervan kunnen wij in de elektromagnetische veldvergelijkingen stellen $\partial_x \equiv 0$ en $\partial_y \equiv 0$. De elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein (18.1) en (18.2) gaan dan over in

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ 0 & 0 & \partial_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{J}+j\omega\mathbf{D} \tag{21.1}$$

en

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ 0 & 0 & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mathbf{B}, \tag{21.2}$$

terwijl uit (18.3), (18.4) en (18.5) volgt

$$\partial_z(J_z+j\omega D_z) = 0 \tag{21.3}$$

en

$$\partial_z B_z = 0. \tag{21.4}$$

Omtrent het medium waarin het golfverschijnsel optreedt, onderstellen wij, dat dit in het frequentiedomein constitutieve vergelijkingen van de gedaante (18.18) tot en met (18.20) bezit. Wij onderzoeken nu het elektro-

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

magnetische veld in een homogeen deel van het medium, alwaar (18.18) tot en met (18.20) overgaan in

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{21.5}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{21.6}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega), \tag{21.7}$$

waarin σ, ε en μ plaatsonafhankelijk zijn. Substitutie van (21.5) tot en met (21.7) in (21.1) en (21.2) leidt tot twee gescheiden stelsels vergelijkingen

$$-\partial_z H_y = (\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)E_x, \tag{21.8}$$

$$\partial_z E_x = -\mathrm{j}\omega\mu H_y \tag{21.9}$$

en

$$\partial_z H_x = (\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)E_y, \tag{21.10}$$

$$-\partial_z E_y = -\mathrm{j}\omega\mu H_x. \tag{21.11}$$

Verder volgt uit (21.1)

$$E_z = 0, \tag{21.12}$$

hetgeen in overeenstemming is met (21.3) en uit (21.2)

$$H_z = 0, \tag{21.13}$$

hetgeen in overeenstemming is met (21.4). De niet-verdwijnende veldcomponenten voldoen elk aan de eendimensionale vergelijking van HELMHOLTZ

$$[\partial_z^2-(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\mathrm{j}\omega\mu]\{E_x, H_y, E_y, H_x\} = 0, \tag{21.14}$$

die telkens door eliminatie van één van de veldcomponenten uit (21.8) en (21.9) of uit (21.10) en (21.11) ontstaat. De oplossingen van (21.14) zijn exponentiële functies van de gedaante $\exp(\Gamma z)$, waarin

$$\Gamma^2 = (\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon)\mathrm{j}\omega\mu. \tag{21.15}$$

Om uit deze vergelijking Γ te bepalen, moet uit het complexe rechterlid de vierkantswortel worden genomen. Aangezien de vierkantswortel een tweewaardige functie is waarvan de functiewaarden tegengesteld gelijk zijn, volgen uit (21.15) twee waarden: $\Gamma=\Gamma_1$ en $\Gamma=\Gamma_2$, met de eigenschap $\Gamma_2=-\Gamma_1$. In overeenstemming hiermee verkrijgen wij twee oplossingen van (21.14), en wel de functies $\exp(\Gamma_1 z)$ en $\exp(\Gamma_2 z)$.

Met het oog op de fysische interpretatie van de resultaten is het gewenst één van de oplossingen van (21.14) aan te duiden als een „golf in de positieve z-richting" en de andere als een „golf in de negatieve z-richting". Wat wij precies hieronder verstaan, zal verderop in deze paragraaf worden gespecificeerd. Wel wordt thans reeds afgesproken, dat γ het symbool voor de zodanige vierkantswortel uit het rechterlid van (21.15) zal aanduiden, dat $\exp(-\gamma z)$ de golf in de positieve z-richting voorstelt; dan stelt $\exp(\gamma z)$ de golf in de negatieve z-richting voor. Met deze afspraak schrijven wij

$$\gamma = [(\sigma + j\omega\varepsilon)j\omega\mu]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.16}$$

De beide golven beïnvloeden elkaar — althans in een uniforme sectie van het medium — niet en de algemene oplossing van (21.14) bestaat dan ook uit een lineaire combinatie van de functies $\exp(-\gamma z)$ en $\exp(\gamma z)$. De door (21.16) gedefinieerde grootheid

$$\gamma = \alpha + j\beta \tag{21.17}$$

heet de complexe *voortplantingscoëfficiënt* van de golven; $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(\gamma)$ heet hun *verzwakkingscoëfficiënt* en $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(\gamma)$ hun *fasecoëfficiënt*. Deze benamingen zijn ontleend aan de eigenschap, dat voor $\exp(-\gamma z)$ geldt

$$\exp(-\gamma z) = \exp(-\alpha z)\exp(-j\beta z), \tag{21.18}$$

waarin $|\exp(-\gamma z)| = \exp(-\alpha z)$ en $\arg[\exp(-\gamma z)] = -\beta z$. Voor de fasecoëfficiënt kan men ook schrijven

$$\beta = \omega / v_{\mathrm{ph}}, \tag{21.19}$$

waarin v_{ph} de *fasesnelheid* van de golven wordt genoemd, of

$$\beta = 2\pi/\lambda, \tag{21.20}$$

waarin λ de *golflengte* van de golven is.

Teneinde de componenten van de elektrische en de magnetische veldsterkte van de golven in de twee richtingen op overzichtelijke wijze te rangschikken, voeren wij de *golfmatrix* in. Dit is een kolommatrix waarin van een bepaalde veldcomponent of combinatie van veldcomponenten de deelbijdrage van de golf in de negatieve z-richting en de deelbijdrage van de golf in de positieve z-richting als elementen worden opgenomen. Welke veldcomponent (bijvoorbeeld E_x, H_y, E_y, H_x) of combinatie van veldcomponenten (bijvoorbeeld $E_x + jE_y$, $E_x - jE_y$) men beschouwt, dient van geval tot geval te worden gespecificeerd. Laat $\Psi^- = \Psi^-(z)$ de deelbijdrage zijn van de golf in de negatieve z-richting en $\Psi^+ = \Psi^+(z)$ de

deelbijdrage van de golf in de positieve z-richting, dan wordt de golfmatrix $[\Psi] = [\Psi(z)]$ gegeven door

$$[\Psi] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Psi^- \\ \\ \Psi^+ \end{bmatrix}. \tag{21.21}$$

Daar Ψ^- evenredig is met $\exp(\gamma z)$ en Ψ^+ met $\exp(-\gamma z)$, geldt

$$\Psi^-(z) = \Psi^-(z_1) \exp[\gamma(z-z_1)] \tag{21.22}$$

en

$$\Psi^+(z) = \Psi^+(z_1) \exp[-\gamma(z-z_1)] \tag{21.23}$$

voor iedere z en z_1 in een uniforme sectie van het medium. Substitutie van (21.22) en (21.23) in (21.21) geeft

$$[\Psi(z)] = \begin{bmatrix} \exp[\gamma(z-z_1)] & 0 \\ \\ 0 & \exp[-\gamma(z-z_1)] \end{bmatrix} [\Psi(z_1)]. \tag{21.24}$$

Via (21.24) zijn de veldcomponenten van de twee golven in een willekeurig vlak te berekenen, indien die veldcomponenten in een bepaald vlak $z = z_1$ bekend zijn. Zo'n vast gekozen vlak in de configuratie noemt men ook wel een *referentievlak*.

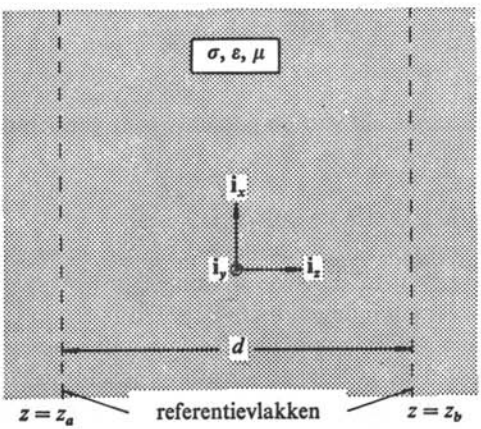


Fig. 27. Uniforme sectie $z_a < z < z_b$ van een homogeen, isotroop en lineair medium; $z = z_a$ is het referentievlak aan de ingang en $z = z_b$ het referentievlak aan de uitgang van de sectie.

Bij de analyse van de voortplanting van eendimensionale golven in een configuratie die is opgebouwd uit een aantal in cascade geschakelde uniforme vlakke secties die elk uit een homogeen, isotroop en lineair medium bestaan (zie Par. 24), kan met voordeel gebruik worden gemaakt van de lineaire betrekkingen die er tussen de veldcomponenten aan de „ingang" van een sectie en de veldcomponenten aan de „uitgang" van die sectie bestaan. Beschouw een uniforme sectie die is gelegen in het gebied $z_a < z < z_b$. Hierin is $z = z_a$ het referentievlak aan de ingang van de sectie en $z = z_b$ het referentievlak aan de uitgang van de sectie (Fig. 27). De lengte van de sectie bedraagt

$$d = z_b - z_a. \tag{21.25}$$

In de eerste plaats wordt de *overdrachtsmatrix* $[T] = [T(d)]$ van de sectie ingevoerd. Deze volgt uit de betrekking

$$[\Psi(z_a)] = [T(d)]\ [\Psi(z_b)]. \tag{21.26}$$

Uit (21.24) en (21.26) wordt voor de overdrachtsmatrix verkregen

$$[T(d)] = \begin{bmatrix} \exp(-\gamma d) & 0 \\ 0 & \exp(\gamma d) \end{bmatrix}. \tag{21.27}$$

In de tweede plaats wordt de *verstrooiingsmatrix* $[S]$ van de sectie ingevoerd. Daartoe rangschikken wij eerst — in een bepaalde volgorde — de veldcomponenten van de van de sectie af lopende golven in een kolommatrix $[B]$ en — in dezelfde volgorde — de veldcomponenten van de naar de sectie toe lopende golven in een kolommatrix $[A]$. Voor de beschouwde sectie geldt

$$[B] = \begin{bmatrix} \Psi^-(z_a) \\ \Psi^+(z_b) \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad [A] = \begin{bmatrix} \Psi^+(z_a) \\ \Psi^-(z_b) \end{bmatrix}. \tag{21.28}$$

De verstrooiingsmatrix $[S]$ van de sectie volgt dan uit de betrekking

$$[B] = [S][A]. \tag{21.29}$$

Uit (21.22), (21.23), (21.28) en (21.29) wordt voor de verstrooiingsmatrix verkregen

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-\gamma d) \\ \exp(-\gamma d) & 0 \end{bmatrix}. \tag{21.30}$$

Vervolgens geven wij een aantal betrekkingen tussen de veldcompo-

nenten van een golf in een bepaalde richting (de positieve of de negatieve z-richting). Daar $\partial_z \Psi^+ = -\gamma \Psi^+$ en $\partial_z \Psi^- = \gamma \Psi^-$, volgt uit (21.8) en (21.9)

$$H_y^+ = YE_x^+ \quad \text{en} \quad H_y^- = -YE_x^-, \tag{21.31}$$

of

$$E_x^+ = ZH_y^+ \quad \text{en} \quad E_x^- = -ZH_y^-, \tag{21.32}$$

waarin

$$Y \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\sigma + j\omega\varepsilon)/\gamma = \gamma/j\omega\mu \tag{21.33}$$

de *golfadmittantie* en

$$Z \stackrel{\text{def}}{=\!=} j\omega\mu/\gamma = \gamma/(\sigma + j\omega\varepsilon) \tag{21.34}$$

de *golfimpedantie* van de golven heet. Uit (21.33) en (21.34) volgt de betrekking

$$YZ = 1. \tag{21.35}$$

Evenzo volgt uit (21.10) en (21.11)

$$H_x^+ = -YE_y^+ \quad \text{en} \quad H_x^- = YE_y^-, \tag{21.36}$$

of

$$E_y^+ = -ZH_x^+ \quad \text{en} \quad E_y^- = ZH_x^-. \tag{21.37}$$

Verder volgt uit (21.12) en (21.13), dat de golven *transversaal* zijn.

Omtrent de *polarisatietoestand* van de veldgrootheden valt op te merken, dat elk van de combinaties van veldcomponenten $\{E_x, H_y\}$ of $\{E_y, H_x\}$ een elektromagnetisch veld voorstelt waarvan zowel de elektrische als de magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd is. Kortweg duidt men zulke velden ook wel aan als lineair gepolariseerde velden en de bijbehorende golven als lineair gepolariseerde golven. De superpositie van de beschouwde combinaties van veldcomponenten zal in het algemeen tot een elektromagnetisch veld leiden waarvan zowel de elektrische als de magnetische veldsterkte elliptisch gepolariseerd is. Kortweg duidt men zulke velden ook wel aan als elliptisch gepolariseerde velden en de bijbehorende golven als elliptisch gepolariseerde golven.

De over een periode (in de tijd) gemiddelde oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom wordt gegeven door (zie (15.37))

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = \tfrac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \tag{21.38}$$

Voor de beschouwde eendimensionale golven heeft $\langle \mathbf{S} \rangle_T$ alleen een com-

ponent in de z-richting; deze schrijven wij als

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = I\mathbf{i}_z, \tag{21.39}$$

waarin $I = I(z)$ de *intensiteit* (ten opzichte van de positieve z-richting) van het elektromagnetische veld heet. De intensiteit is additief ten aanzien van de superpositie van de lineair gepolariseerde deelvelden $\{E_x, H_y\}$ en $\{E_y, H_x\}$ en is gegeven door

$$I = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*). \tag{21.40}$$

Voor een golf in een bepaalde richting is het gebruikelijk de intensiteit te betrekken op deze richting. Voor een golf in de positieve z-richting schrijven wij dan $\langle \mathbf{S}^+ \rangle_T = I^+\mathbf{i}_z$ en voor een golf in de negatieve z-richting $\langle \mathbf{S}^- \rangle_T = -I^-\mathbf{i}_z$. Op grond van de z-afhankelijkheid van de veldcomponenten van een golf in de positieve z-richting geldt

$$I^+(z) = I^+(z_1)\exp[-2\alpha(z-z_1)]; \tag{21.41}$$

op grond van de z-afhankelijkheid van de veldcomponenten van een golf in de negatieve z-richting geldt

$$I^-(z) = I^-(z_1)\exp[2\alpha(z-z_1)]. \tag{21.42}$$

In de uitdrukkingen voor I^+ en I^-, die uit (21.40) volgen, kunnen wij gebruik maken van de betrekkingen (21.31), (21.32), (21.36) en (21.37) die er tussen de veldcomponenten van de golven in een bepaalde richting bestaan. Hiermee wordt verkregen

$$\begin{aligned} I^+ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Y^*)\,[|E_x^+|^2 + |E_y^+|^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Z)\,[|H_y^+|^2 + |H_x^+|^2] \end{aligned} \tag{21.43}$$

en

$$\begin{aligned} I^- &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Y^*)\,[|E_x^-|^2 + |E_y^-|^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(Z)\,[|H_y^-|^2 + |H_x^-|^2]. \end{aligned} \tag{21.44}$$

Voor de superpositie van golven in de twee richtingen is de intensiteit als functie van z gecompliceerder van bouw. Substitutie van $E_x = E_x^+ + E_x^-$, $H_y = H_y^+ + H_y^-$, $E_y = E_y^+ + E_y^-$ en $H_x = H_x^+ + H_x^-$ in (21.40) leidt tot

$$I = I^+ - I^- + J, \tag{21.45}$$

waarin I^+ wordt gegeven door (21.43), I^- door (21.44) en J door

$$J = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(E_x^+ H_y^{-*} + E_x^- H_y^{+*} - E_y^+ H_x^{-*} - E_y^- H_x^{+*}). \tag{21.46}$$

Omtrent de z-afhankelijkheid van $J = J(z)$ valt op te merken, dat ieder van de termen in het rechterlid van (21.46) van de gedaante $\Psi^+\Psi^{-*}$ of

$\Psi^-\Psi^{+*}$ is en dat

$$\Psi^+(z)\Psi^{-*}(z) = \Psi^+(z_1)\Psi^{-*}(z_1)\exp[-2j\beta(z-z_1)] \tag{21.47}$$

en

$$\Psi^-(z)\Psi^{+*}(z) = \Psi^-(z_1)\Psi^{+*}(z_1)\exp[2j\beta(z-z_1)]. \tag{21.48}$$

Met gebruikmaking van (21.31), (21.32), (21.36) en (21.37) is de uitdrukking voor J te herleiden tot

$$\begin{aligned} J &= -\mathrm{Im}(Y)\,\mathrm{Im}(E_x^+E_x^{-*}+E_y^+E_y^{-*}) \\ &= -\mathrm{Im}(Z)\,\mathrm{Im}(H_y^+H_y^{-*}+H_x^+H_x^{-*}). \end{aligned} \tag{21.49}$$

Op grond van (21.47) en (21.48) geldt derhalve

$$\langle J\rangle_{\lambda/2} = 0, \tag{21.50}$$

waarin

$$\langle\ldots\rangle_{\lambda/2} \overset{\text{def}}{=} (2/\lambda)\int_{z_0}^{z_0+\lambda/2} \ldots \mathrm{d}z \tag{21.51}$$

de gemiddelde waarde over een halve golflengte (in de z-richting) voorstelt. Uit (21.45) blijkt, dat in het algemeen $I \neq I^+ - I^-$.

Na deze algemene beschouwingen komen wij terug op het vraagstuk van de bepaling van de complexe voortplantingscoëfficiënt $\gamma = \alpha + j\beta$ uit (21.16). De berekening van het rechterlid levert in het bijzonder het verloop van α en β als functie van de frequentie, welk verband van groot belang is bij de toepassing van eendimensionale elektromagnetische golven in de telecommunicatietechniek. Voor de berekening maken wij gebruik van het in Aanhangsel C opgenomen rekenschema voor de bepaling van reëel en imaginair deel van de vierkantswortel uit een complex getal. Dit rekenschema leidt tot twee antwoorden; één van deze antwoorden moet worden geïdentificeerd met γ. Zoals in het begin van deze paragraaf is gesteld, moet dit identificeren zodanig geschieden, dat $\exp(-\gamma z)$ een golf in de positieve z-richting voorstelt. Voor dit laatste eisen wij het volgende:

(1) Als $\langle S_z\rangle_T \neq 0$, wordt γ zodanig gekozen, dat $\langle S_z\rangle_T > 0$. Op grond van (21.39), (21.43), (21.33) en (21.34) betekent dit, dat de gekozen waarde van γ aan de voorwaarden $\mathrm{Re}(\gamma/j\omega\mu) > 0$ en $\mathrm{Re}[\gamma/(\sigma+j\omega\varepsilon)] > 0$ voldoet.

(2) Als $\langle S_z\rangle_T = 0$ en $\mathrm{Re}(\gamma) \neq 0$, wordt γ zodanig gekozen, dat $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$.

(3) Als $\langle S_z\rangle_T = 0$, $\mathrm{Re}(\gamma) = 0$ en $\mathrm{Im}(\gamma) \neq 0$, wordt γ zodanig gekozen, dat $\mathrm{Im}(\gamma) > 0$.

Ter toelichting op deze regels merken wij het volgende op.

Voorwaarde (1) houdt in, dat als de golf energie transporteert, dit in de positieve z-richting gebeurt.

Voorwaarde (2) legt de keuze van γ vast als de golf geen energie transporteert. Als dan $\mathrm{Re}(\gamma) \neq 0$, houdt de keuze in, dat het veld een exponentiële verzwakking in de positieve z-richting vertoont.

Voorwaarde (3) legt de keuze van γ vast, als de golf geen energie transporteert en ook $\mathrm{Re}(\gamma) = 0$. Als verder $\mathrm{Im}(\gamma) \neq 0$, houdt de keuze in, dat de fase van het veld in de positieve z-richting afneemt.

Tot slot merken wij op, dat het overblijvende geval $\gamma = 0$ aanleiding geeft tot een constant elektromagnetisch veld of een veld dat in de z-richting een lineair verloop heeft; geen van deze velden kan nog een golf worden genoemd.

In de optica is het gebruikelijk γ uit te drukken in de *complexe brekingsindex*

$$n = n' - \mathrm{j}n'' \tag{21.52}$$

van de eendimensionale elektromagnetische golven. Deze wordt ingevoerd via de betrekking

$$\gamma = \mathrm{j}\omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}n, \tag{21.53}$$

zodat $n = 1$ voor het vacuüm. Uit (21.16) en (21.53) volgt, dat de complexe brekingsindex wordt gegeven door

$$n = [(\sigma/\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 + \varepsilon_r)\mu_r]^{\frac{1}{2}} = [(\sigma/\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r + 1)\varepsilon_r\mu_r]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.54}$$

Door van (21.17) en (21.52) in (21.53) gebruik te maken, verkrijgt men

$$\alpha = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}n'' \tag{21.55}$$

en

$$\beta = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}n'. \tag{21.56}$$

Met betrekking tot de berekening van n' en n'' uit het rechterlid van (21.54) zijn overeenkomstige regels van toepassing als die voor de berekening van α en β uit (21.16) golden. Zij worden hier niet expliciet weergegeven, omdat de resultaten onmiddellijk uit (21.55) en (21.56) volgen.

Opgemerkt wordt, dat bij de afgesproken ondubbelzinnige betekenis van $[\ldots]^{\frac{1}{2}}$ in (21.16) en (21.54) de rechterleden van (21.16), (21.33), (21.34) en (21.54) regulier-analytische functies zijn van σ, ε (of ε_r), μ (of μ_r) en ω, althans zolang als $\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon$ en $\mathrm{j}\omega\mu$ begrensd en niet gelijk

aan nul zijn. In Par. 19 is aangetoond, dat voor een causaal medium σ, ε en μ regulier-analytische functies van ω zijn in het halfvlak $\mathrm{Im}(\omega)<0$. Hiermee worden $\gamma/\omega=\gamma(\omega)/\omega$, $Y=Y(\omega)$, $Z=Z(\omega)$ en $n=n(\omega)$ regulier-analytische functies van ω in het halfvlak $\mathrm{Im}(\omega)<0$, althans zolang $\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon$ en $\mathrm{j}\omega\mu$ in $\mathrm{Im}(\omega)<0$ niet gelijk aan nul zijn (begrensd zijn σ, ε en μ in ieder geval). Wanneer wij dus nulpunten van $\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon$ en van $\mathrm{j}\omega\mu$ in $\mathrm{Im}(\omega)<0$ uitsluiten, gelden de in Par. 19 behandelde causaliteitsbetrekkingen ook voor $\mathrm{Re}(\gamma/\omega)=\alpha/\omega$ en $\mathrm{Im}(\gamma/\omega)=\beta/\omega$, $\mathrm{Re}(Y)$ en $\mathrm{Im}(Y)$, $\mathrm{Re}(Z)$ en $\mathrm{Im}(Z)$, $\mathrm{Re}(n)=n'$ en $\mathrm{Im}(n)=-n''$. (Bij de toepassing van de causaliteitsbetrekkingen moet men wel op de gebruikte tekens bij splitsing in reëel en imaginair deel letten.)

Ter illustratie van het voorafgaande zullen wij hieronder een aantal voorbeelden bespreken van media waarvan de constitutieve coëfficiënten bepaalde eigenschappen vertonen. Voor deze gevallen zullen wij de uitdrukkingen voor α en β (en daarmee voor n' en n'') expliciet bepalen. Om de eigenschappen van de constitutieve coëfficiënten tot uitdrukking te brengen, zullen wij — in overeenstemming met Par. 19 — de volgende notatie gebruiken

$$\sigma=\sigma'-\mathrm{j}\sigma'', \qquad \varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon'', \qquad \mu=\mu'-\mathrm{j}\mu'', \tag{21.57}$$

dan wel

$$\sigma=\sigma'-\mathrm{j}\sigma'', \qquad \varepsilon_{\mathrm{r}}=\varepsilon_{\mathrm{r}}'-\mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{r}}'', \qquad \mu_{\mathrm{r}}=\mu_{\mathrm{r}}'-\mathrm{j}\mu_{\mathrm{r}}''. \tag{21.58}$$

(a) *Medium met constitutieve coëfficiënten:* $\sigma'=0$, $\sigma''=0$, $\varepsilon'>0$, $\varepsilon''=0$, $\mu'>0$, $\mu''=0$

Substitutie van deze gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma=(-\omega^2\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}}. \tag{21.59}$$

Dit leidt tot

$$\alpha=0 \tag{21.60}$$

en

$$\beta=\omega(\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}} \tag{21.61}$$

en met gebruikmaking van (21.55) en (21.56) tot

$$n''=0 \tag{21.62}$$

en

$$n'=(\varepsilon_{\mathrm{r}}'\mu_{\mathrm{r}}')^{\frac{1}{2}}. \tag{21.63}$$

Voor het beschouwde medium geldt verder

$$Y = (\varepsilon'/\mu')^{\frac{1}{2}} \tag{21.64}$$

en

$$Z = (\mu'/\varepsilon')^{\frac{1}{2}}, \tag{21.65}$$

waarin Y en Z reëel zijn. Op grond van (21.45) en (21.49) is dan

$$I = I^+ - I^-. \tag{21.66}$$

De plaats- en tijdafhankelijkheid van eendimensionale golven in het beschouwde medium is van gedaante

$$\exp[\mathrm{j}(\omega t \mp \beta z)] = \exp[2\pi\mathrm{j}(t/T \mp z/\lambda)] = \exp[\mathrm{j}\omega(t \mp z/v_{\mathrm{ph}})], \tag{21.67}$$

waarin de fasesnelheid is gegeven door (zie (21.19))

$$v_{\mathrm{ph}} = (\varepsilon'\mu')^{-\frac{1}{2}} = c_0/n'. \tag{21.68}$$

Doordat in het medium geen verzwakking optreedt, kunnen ook *zuiver staande golven* optreden. Hieronder verstaan wij een zodanige superpositie van een golf in de positieve z-richting en een golf in de negatieve z-richting, dat de elementen van de golfmatrix (21.21) aan de voorwaarde

$$|\Psi^-(z)| = |\Psi^+(z)| \tag{21.69}$$

voldoen. Uit (21.22) en (21.23) volgt, dat in het beschouwde medium aan (21.69) voor iedere waarde van z is voldaan, zodra er voor één waarde van z aan (21.69) is voldaan. Laat nu $z = z_0$ een vlak zijn waar Ψ^- en Ψ^+ in fase zijn; in verband met (21.69) betekent dit

$$\Psi^-(z_0) = \Psi^+(z_0). \tag{21.70}$$

Op grond van (21.22), (21.23), (21.60) en (21.61) is dan voor de superpositie van $\Psi^-(z)$ en $\Psi^+(z)$ te schrijven

$$\begin{aligned}\Psi^-(z)+\Psi^+(z) &= \Psi^-(z_0)\exp[\mathrm{j}\beta(z-z_0)] \\ &\quad + \Psi^+(z_0)\exp[-\mathrm{j}\beta(z-z_0)] \\ &= 2\Psi^{\mp}(z_0)\cos[\beta(z-z_0)] \\ &= 2\Psi^{\mp}(z_0)\cos[2\pi(z-z_0)/\lambda].\end{aligned} \tag{21.71}$$

Uit (21.71) volgt, dat voor de zuiver staande golf geldt

$$\begin{aligned}&\min(|\Psi^-(z)+\Psi^+(z)|) = 0 \text{ en wel ter plaatse} \\ &z = z_0+(2m+1)\lambda/4 \text{ met } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{aligned} \tag{21.72}$$

en

$$\begin{aligned}&\max(|\Psi^-(z)+\Psi^+(z)|) = 2|\Psi^{\mp}(z_0)| \text{ en wel ter plaatse} \\ &z = z_0+m\lambda/2 \text{ met } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{aligned} \tag{21.73}$$

Voor een zuiver staande golf geldt verder $I^+ = I^-$, zodat $I = I^+ - I^- = 0$: een zuiver staande golf transporteert geen vermogen.

In het algemeen zijn ε' en μ' — en daarmee de fasesnelheid en de brekingsindex van de golven — afhankelijk van de frequentie. Dit verschijnsel noemt men *dispersie*. In het speciale geval dat ε' en μ' onafhankelijk van de frequentie zijn, zijn de golven dispersievrij en corresponderen de oplossingen (21.67) in het tijddomein met de in Par. 20 besproken golven en wel met een lopende golf in de positieve z-richting, respectievelijk een lopende golf in de negatieve z-richting.

Tot de in dit onderdeel beschouwde klasse van materialen behoren de *verliesvrije diëlektrica* (o.a. de diëlektrica die voor optische frequenties transparant zijn). Hiervoor geldt, dat ε reëel en positief is, terwijl $\mu = \mu_0$.

(b) *Medium met constitutieve coëfficiënten:* $\sigma' > 0$, $\sigma'' = 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu' > 0$, $\mu'' = 0$

Substitutie van deze gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma = [(\sigma' + \mathrm{j}\omega\varepsilon')\mathrm{j}\omega\mu']^{\frac{1}{2}}. \tag{21.74}$$

Met gebruikmaking van het in Aanhangsel C opgenomen rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal leidt (21.74) tot

$$\alpha = \omega(\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\sigma'/\omega\varepsilon')^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} \tag{21.75}$$

en

$$\beta = \omega(\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\sigma'/\omega\varepsilon')^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.76}$$

Met behulp van (21.55) en (21.56) verkrijgt men verder

$$n'' = (\varepsilon_r'\mu_r')^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\sigma'/\omega\varepsilon')^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}} \tag{21.77}$$

en

$$n' = (\varepsilon_r'\mu_r')^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\sigma'/\omega\varepsilon')^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.78}$$

Om deze resultaten grafisch in een universele kromme weer te geven, voeren wij de genormeerde grootheden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{n}''$, $\bar{n}'$ en $\bar{\omega}$ in via de betrekkingen

$$\alpha = \sigma'(\mu'/\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}, \tag{21.79}$$

$$\beta = \sigma'(\mu'/\varepsilon')^{\frac{1}{2}}\bar{\beta}, \tag{21.80}$$

$$n'' = (\varepsilon_r'\mu_r')^{\frac{1}{2}}\bar{n}'', \tag{21.81}$$

$$n' = (\varepsilon_r'\mu_r')^{\frac{1}{2}}\bar{n}', \tag{21.82}$$

$$\bar{\omega} = (\varepsilon'/\sigma')\omega. \tag{21.83}$$

Uit (21.75) tot en met (21.83) wordt verkregen

$$\bar{\alpha} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}(1/\bar{\omega}^2+1)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}, \tag{21.84}$$

$$\bar{\beta} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}(1/\bar{\omega}^2+1)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}, \tag{21.85}$$

$$\bar{n}'' = [\tfrac{1}{2}(1/\bar{\omega}^2+1)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}, \tag{21.86}$$

$$\bar{n}' = [\tfrac{1}{2}(1/\bar{\omega}^2+1)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.87}$$

In Fig. 28 zijn $\bar{\alpha}$ en $\bar{\beta}$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven; in Fig. 29 zijn $\bar{n}''$ en $\bar{n}'$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven.

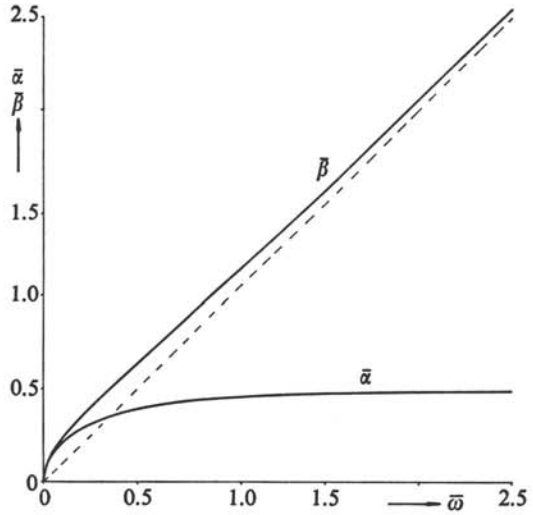


Fig. 28. Genormeerde verzwakkingscoëfficiënt $\bar{\alpha}$ en genormeerde fasecoëfficiënt $\bar{\beta}$ als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een medium met reële en positieve constitutieve coëfficiënten σ, ε en μ.

Voor een grote klasse van materialen zijn de elektromagnetische eigenschappen te beschrijven met behulp van de constitutieve coëfficiënten van het in dit onderdeel beschouwde type. In het frequentiegebied van 0 Hz tot omstreeks 10 GHz zijn σ', ε' en μ' voor deze materialen weinig frequentie-afhankelijk.

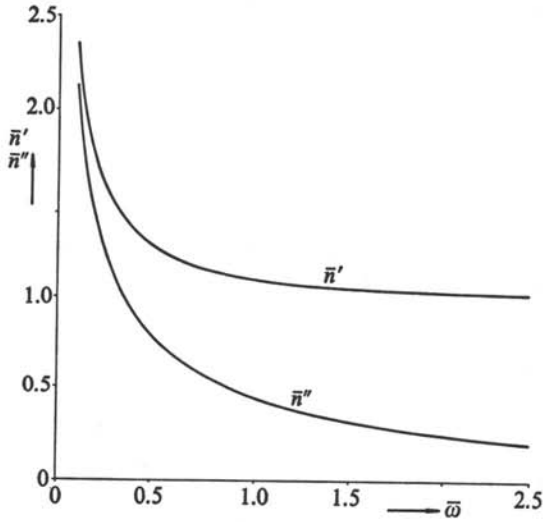


Fig. 29. Genormeerde complexe brekingsindex als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een medium met reële en positieve constitutieve coëfficiënten σ, ε en μ.

(c) *Medium met constitutieve coëfficiënten* $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_p(\omega)$, $\mu = \mu_0$

Hierin is $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\omega)$ gegeven door

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2). \tag{21.88}$$

De grootheid ω_p wordt de *plasmacirkelfrequentie* genoemd en is reëel en positief. Substitutie van de gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma = [-\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.89}$$

Voor het bepalen van α en β moet onderscheid worden gemaakt tussen de frequentiegebieden $0 < \omega < \omega_p$ en $\omega_p < \omega < \infty$. Men verkrijgt dan

$$\alpha = \begin{cases} \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}(\omega_p^2/\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < \omega < \omega_p, \\ 0 & \text{voor } \omega_p < \omega < \infty \end{cases} \tag{21.90}$$

en

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < \omega < \omega_p, \\ \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } \omega_p < \omega < \infty. \end{cases} \tag{21.91}$$

Met behulp van (21.55) en (21.56) wordt verder verkregen

$$n'' = \begin{cases} (\omega_p^2/\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < \omega < \omega_p, \\ 0 & \text{voor } \omega_p < \omega < \infty \end{cases} \tag{21.92}$$

en

$$n' = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < \omega < \omega_p, \\ (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } \omega_p < \omega < \infty. \end{cases} \tag{21.93}$$

Om deze resultaten grafisch weer te geven in een universele kromme, voeren wij de genormeerde grootheden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ en $\bar{\omega}$ in via de betrekkingen

$$\alpha = \omega_p(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}, \tag{21.94}$$

$$\beta = \omega_p(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\beta}, \tag{21.95}$$

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_p. \tag{21.96}$$

Opgemerkt wordt, dat n'' en n' reeds de genormeerde vorm hebben. Uit (21.90) tot en met (21.96) wordt verkregen

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \bar{\omega}(1/\bar{\omega}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < \bar{\omega} < 1, \\ 0 & \text{voor } 1 < \bar{\omega} < \infty, \end{cases} \tag{21.97}$$

$$\bar{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < \bar{\omega} < 1, \\ \bar{\omega}(1 - 1/\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 1 < \bar{\omega} < \infty, \end{cases} \tag{21.98}$$

$$n'' = \begin{cases} (1/\bar{\omega}^2 - 1)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < \bar{\omega} < 1, \\ 0 & \text{voor } 1 < \bar{\omega} < \infty, \end{cases} \tag{21.99}$$

$$n' = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < \bar{\omega} < 1, \\ (1 - 1/\bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}} & \text{voor } 1 < \bar{\omega} < \infty. \end{cases} \tag{21.100}$$

In Fig. 30 zijn $\bar{\alpha}$ en $\bar{\beta}$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven; in Fig. 31 zijn n'' en n' als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven.

De in dit onderdeel beschouwde constitutieve coëfficiënten zijn van toepassing op een zogenaamd *botsingsvrij plasma*. Hierbij zijn vrije elektrisch geladen deeltjes (bijvoorbeeld elektronen) onderworpen aan de elektrische kracht van een sinusvormig met de tijd veranderend elektromagnetisch veld en wordt bij de beweging alleen hun traagheid in rekening gebracht. Van de invloed van de magnetische kracht en van

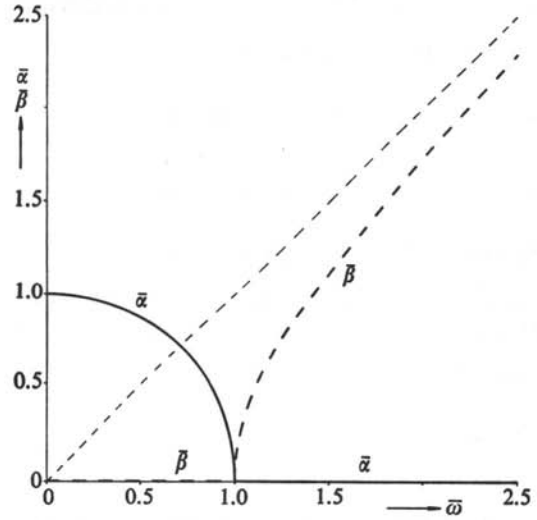


Fig. 30. Genormeerde verzwakkingscoëfficiënt $\bar{\alpha}$ en genormeerde fasecoëfficiënt $\bar{\beta}$ als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een botsingsvrij plasma.

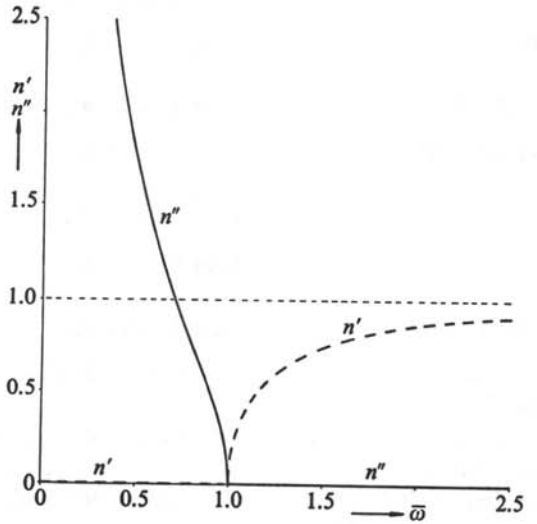


Fig. 31. Complexe brekingsindex als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een botsingsvrij plasma.

de botsingen wordt afgezien (zie ook Vraagstuk 21.11). Uit (21.33), (21.34), (21.90) en (21.91) volgt, dat in het frequentiegebied $0<\omega<\omega_p$ geldt $\mathrm{Re}(Y)=0$ en $\mathrm{Re}(Z)=0$, zodat in dit frequentiegebied geen transport van vermogen kan optreden.

(d) *Medium met constitutieve coëfficiënten* $\sigma=0$, $\varepsilon=\varepsilon_a(\omega)$, $\mu=\mu_0$

Hierin is $\varepsilon_a=\varepsilon_a(\omega)$ gegeven door

$$\varepsilon_a=\varepsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_0^2-j\omega\Delta}\right]. \tag{21.101}$$

Constitutieve coëfficiënten van het hier beschouwde type beschrijven het elektromagnetische gedrag van een *diëlektrisch materiaal* in de buurt van een zogenaamde *absorptielijn*; ω_0 heet de centrale cirkelfrequentie van de absorptielijn en Δ zijn lijnbreedte. De grootheid ω_p heet de plasmacirkelfrequentie. De uitdrukking voor ε_a ontstaat uit een microscopische beschouwing waarbij ieder atoom of molecuul als een „gedempte harmonische oscillator" wordt opgevat, die onderworpen is aan de elektrische kracht van een sinusvormig in de tijd veranderend elektromagnetisch veld (zie ook Vraagstuk 21.12). Voor ε_a' en ε_a'' wordt uit (21.101) verkregen

$$\varepsilon_a'=\varepsilon_0\left[1-\frac{\omega_p^2(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\Delta^2}\right] \tag{21.102}$$

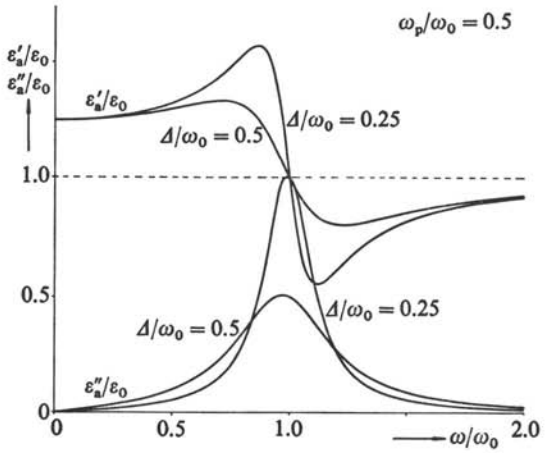


Fig. 32. De complexe permittiviteit van een diëlektricum in de buurt van een absorptielijn met centrale cirkelfrequentie ω_0 en lijnbreedte Δ.

en

$$\varepsilon_a'' = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega \Delta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Delta^2}. \tag{21.103}$$

Het verloop van ε_a' en ε_a'' als functie van ω is weergegeven in Fig. 32. Substitutie van de gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma = [(j\omega\varepsilon_a' + \omega\varepsilon_a'')j\omega\mu_0]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.104}$$

Met gebruikmaking van het in Aanhangsel C opgenomen rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal leidt (21.104) tot

$$\alpha = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.105}$$

en

$$\beta = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}}. \tag{21.106}$$

Met behulp van (21.55) en (21.56) verkrijgt men verder

$$n'' = [\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.107}$$

en

$$n' = [\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}}. \tag{21.108}$$

Voor het grafisch weergeven van deze resultaten voeren wij de genormeerde grootheden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\omega}_p$, $\bar{\Delta}$ en $\bar{\omega}$ in via

$$\alpha = \omega_0(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}, \tag{21.109}$$

$$\beta = \omega_0(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\beta}, \tag{21.110}$$

$$\bar{\omega}_p = \omega_p/\omega_0, \tag{21.111}$$

$$\bar{\Delta} = \Delta/\omega_0, \tag{21.112}$$

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_0. \tag{21.113}$$

Opgemerkt wordt, dat n'' en n' reeds de genormeerde vorm hebben. Uit (21.105), (21.106) en (21.109) tot en met (21.113) wordt verkregen

$$\bar{\alpha} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.114}$$

en

$$\bar{\beta} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{a,r}')^2 + (\varepsilon_{a,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{a,r}']^{\frac{1}{2}}, \tag{21.115}$$

waarin

$$\varepsilon'_{a,r} = 1 - \frac{\bar{\omega}_p^2(\bar{\omega}^2-1)}{(\bar{\omega}^2-1)^2+\bar{\omega}^2\bar{\Delta}^2} \tag{21.116}$$

en

$$\varepsilon''_{a,r} = \frac{\bar{\omega}_p^2\bar{\omega}\bar{\Delta}}{(\bar{\omega}^2-1)^2+\bar{\omega}^2\bar{\Delta}^2}. \tag{21.117}$$

In Fig. 33 zijn $\bar{\alpha}$ en $\bar{\beta}$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven; in Fig. 34 zijn n'' en n' als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven.

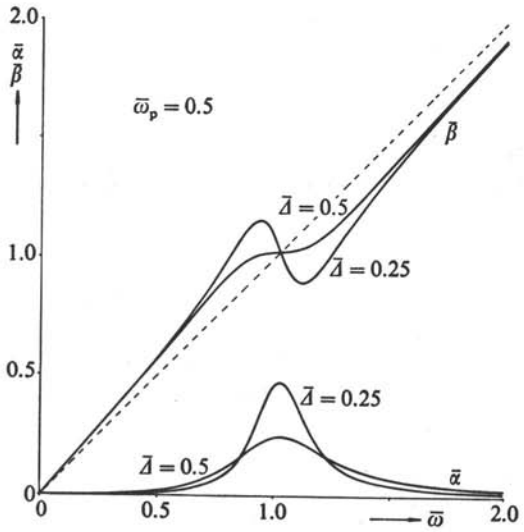


Fig. 33. Genormeerde verzwakkingscoëfficiënt $\bar{\alpha}$ en genormeerde fasecoëfficiënt $\bar{\beta}$ als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een dielektricum met een absorptielijn.

Uit (21.103) volgt, dat $\varepsilon''_{a,r}$ een maximum vertoont, dat voor $\Delta/\omega_0 \ll 1$ is gelegen bij $\omega = \omega_0$ en waarvoor geldt $\max(\varepsilon''_{a,r}) \simeq \omega_p^2/\omega_0\Delta$. Verder is $\varepsilon''_{a,r} \simeq \frac{1}{2}\max(\varepsilon''_{a,r})$ voor $\omega = \omega_0 - \frac{1}{2}\Delta$ en $\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\Delta$, mits $\Delta/\omega_0 \ll 1$; hiermee is de term lijnbreedte verklaard. Uit (21.103), (21.105) en (21.107) volgt verder, dat voor $\Delta/\omega_0 \ll 1$ de grootheden ε''_a, α en n'' praktisch gelijk aan nul zijn voor alle frequenties, behalve voor frequenties in de buurt van ω_0.

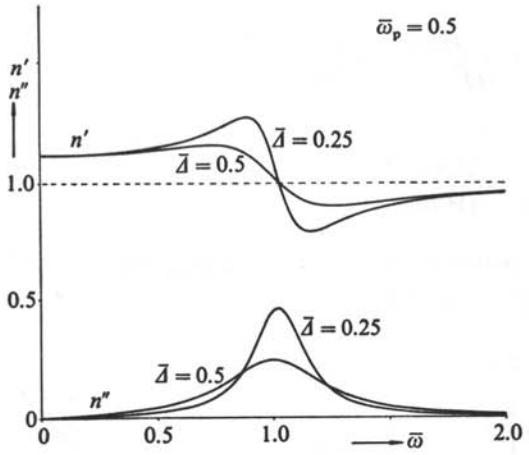


Fig. 34. Complexe brekingsindex als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een diëlektricum met een absorptielijn.

Indien het diëlektricum meer dan één absorptielijn vertoont, wordt voor iedere lijn een term overeenkomend met de responsie van een gedempte harmonische oscillator in de uitdrukking voor de elektrische susceptibiliteit opgenomen. Zo ontstaat een uitdrukking voor de permittiviteit van de gedaante

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left[1 - \sum_m \frac{\omega_{p,m}^2}{\omega^2 - \omega_{0,m}^2 - j\omega\Delta_m} \right], \tag{21.118}$$

waarin de sommatie-index m het rangnummer van de absorptielijn aangeeft.

(e) *Medium met constitutieve coëfficiënten* $\sigma = \sigma_m(\omega)$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$

Hierin is $\sigma_m = \sigma_m(\omega)$ gegeven door

$$\sigma_m = \varepsilon_0 \omega_p^2 / (j\omega + \nu_c). \tag{21.119}$$

Constitutieve coëfficiënten van het hier beschouwde type beschrijven het elektromagnetische gedrag van een aantal *metalen* waarin alleen de geleidingselektronen een bijdrage tot de elektrische geleiding geven. De grootheid ω_p is de plasmacirkelfrequentie van de elektronen, ν_c is de

botsingsfrequentie voor de impulsoverdracht van de elektronen aan het atoomrooster. De uitdrukking voor σ_m ontstaat uit een microscopische beschouwing waarbij ieder elektron is onderworpen aan de elektrische kracht van een sinusvormig met de tijd veranderend elektromagnetisch veld, terwijl bij de beweging de traagheid en de invloed van botsingen met het atoomrooster in rekening worden gebracht (zie ook Vraagstuk 21.13). Voor σ'_m en σ''_m wordt uit (21.119) verkregen

$$\sigma'_m = \varepsilon_0 \omega_p^2 \nu_c / (\omega^2 + \nu_c^2) \tag{21.120}$$

en

$$\sigma''_m = \varepsilon_0 \omega_p^2 \omega / (\omega^2 + \nu_c^2). \tag{21.121}$$

Het verloop van σ'_m en σ''_m als functie van ω is weergegeven in Fig. 35.

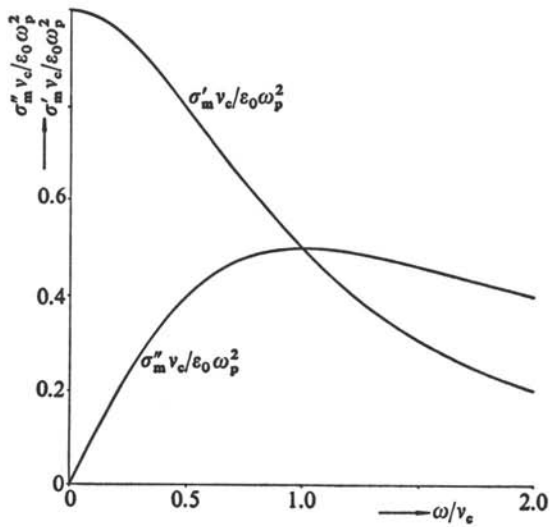


Fig. 35. De complexe soortelijke geleiding van een metaal met botsingsfrequentie voor de impulsoverdracht ν_c.

Substitutie van de gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma = [(\sigma'_m - j\sigma''_m + j\omega\varepsilon_0) j\omega\mu_0]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.122}$$

Met gebruikmaking van het in Aanhangsel C opgenomen rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal leidt

(21.122) tot

$$\alpha = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}} \tag{21.123}$$

en

$$\beta = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.124}$$

Met behulp van (21.55) en (21.56) verkrijgt men verder

$$n'' = [\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}} \tag{21.125}$$

en

$$n' = [\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.126}$$

Voor het grafisch weergeven van deze resultaten voeren wij de genormeerde grootheden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\omega}_p$ en $\bar{\omega}$ in via

$$\alpha = v_c(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}, \tag{21.127}$$

$$\beta = v_c(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\beta}, \tag{21.128}$$

$$\bar{\omega}_p = \omega_p/v_c, \tag{21.129}$$

$$\bar{\omega} = \omega/v_c. \tag{21.130}$$

Opgemerkt wordt, dat n'' en n' reeds de genormeerde vorm hebben. Uit (21.123), (21.124) en (21.127) tot en met (21.130) wordt verkregen

$$\bar{\alpha} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}} \tag{21.131}$$

en

$$\bar{\beta} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)^2 + (\sigma'_m/\omega\varepsilon_0)^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0)]^{\frac{1}{2}}, \tag{21.132}$$

waarin

$$1-\sigma''_m/\omega\varepsilon_0 = 1-\bar{\omega}_p^2/(\bar{\omega}^2+1) \tag{21.133}$$

en

$$\sigma'_m/\omega\varepsilon_0 = \bar{\omega}_p^2/\bar{\omega}(\bar{\omega}^2+1). \tag{21.134}$$

In Fig. 36 zijn $\bar{\alpha}$ en $\bar{\beta}$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven; in Fig. 37 zijn n'' en n' als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven.

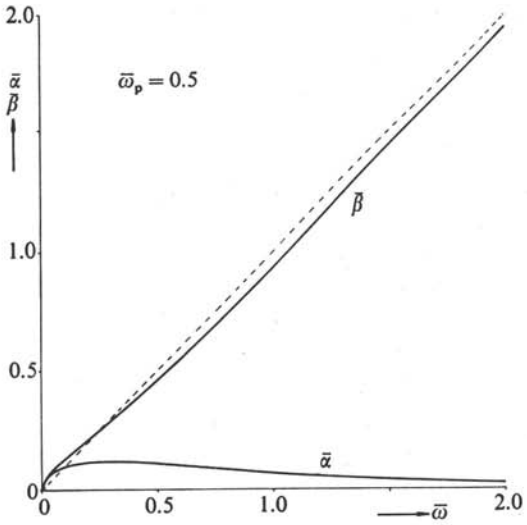


Fig. 36. Genormeerde verzwakkingscoëfficiënt $\bar{\alpha}$ en genormeerde fasecoëfficiënt $\bar{\beta}$ als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een metaal.

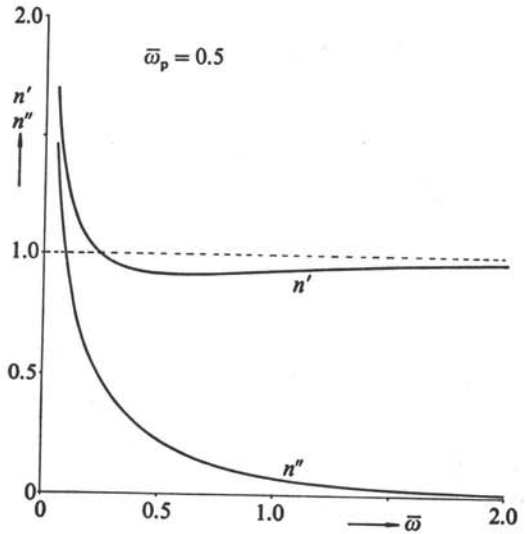


Fig. 37. Complexe brekingsindex als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een metaal.

(f) *Medium met constitutieve coëfficiënten* $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_e(\omega)$, $\mu = \mu_0$

Hierin is $\varepsilon_e = \varepsilon_e(\omega)$ gegeven door

$$\varepsilon_e = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{2I_e}{\omega^2 - \omega_0^2 - j\omega\Delta} \right]. \tag{21.135}$$

Constitutieve coëfficiënten van het hier beschouwde type beschrijven het elektromagnetische gedrag van een diëlektrisch materiaal in de buurt van een *gestimuleerde-emissielijn*. De grootheid ω_0 is de centrale cirkelfrequentie van de spectraallijn van de desbetreffende overgang, Δ is zijn lijnbreedte en I_e zijn genormeerde intensiteit. De uitdrukking voor ε_e ontstaat uit een quantumtheoretische beschouwing waarvoor wij naar de literatuur verwijzen (zie PANTELL and PUTHOFF [25]).
Voor ε_e' en ε_e'' wordt uit (21.135) verkregen

$$\varepsilon_e' = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{2I_e(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Delta^2} \right] \tag{21.136}$$

en

$$\varepsilon_e'' = -\varepsilon_0 \frac{2I_e\omega\Delta}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\Delta^2}. \tag{21.137}$$

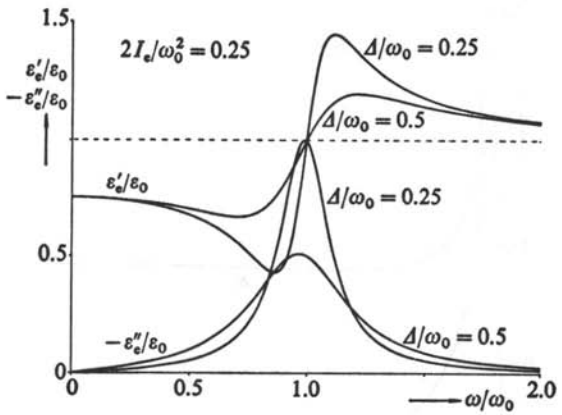


Fig. 38. De complexe permittiviteit van een diëlektricum in de buurt van een gestimuleerde-emissielijn met centrale cirkelfrequentie ω_0 en lijnbreedte Δ.

25. PANTELL, R. H. and H. E. PUTHOFF, *Fundamentals of quantum electronics*, New York, John Wiley and Sons, 1969. Section 3.2.

Daar $\varepsilon_e'' < 0$, is het medium actief (zie (18.43)). Het verloop van ε_e' en ε_e'' als functie van ω is weergegeven in Fig. 38. Substitutie van de gegevens in (21.16) geeft

$$\gamma = [(j\omega\varepsilon_e' + \omega\varepsilon_e'')j\omega\mu_0]^{\frac{1}{2}}. \tag{21.138}$$

Met gebruikmaking van het in Aanhangsel C opgenomen rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal leidt (21.138) tot

$$\alpha = -\omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.139}$$

en

$$\beta = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}}. \tag{21.140}$$

Met behulp van (21.55) en (21.56) verkrijgt men verder

$$n'' = -[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.141}$$

en

$$n' = [\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}}. \tag{21.142}$$

Voor het grafisch weergeven van deze resultaten voeren wij de genormeerde grootheden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{I}_e$, $\bar{\Delta}$ en $\bar{\omega}$ in via

$$\alpha = \omega_0(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}, \tag{21.143}$$

$$\beta = \omega_0(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\bar{\beta}, \tag{21.144}$$

$$\bar{I}_e = I_e/\omega_0^2, \tag{21.145}$$

$$\bar{\Delta} = \Delta/\omega_0, \tag{21.146}$$

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_0. \tag{21.147}$$

Opgemerkt wordt, dat n'' en n' reeds de genormeerde vorm hebben. Uit (21.139), (21.140) en (21.143) tot en met (21.147) wordt verkregen

$$\bar{\alpha} = -\bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}} \tag{21.148}$$

en

$$\bar{\beta} = \bar{\omega}[\tfrac{1}{2}\{(\varepsilon_{e,r}')^2 + (\varepsilon_{e,r}'')^2\}^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{e,r}']^{\frac{1}{2}}, \tag{21.149}$$

waarin

$$\varepsilon_{e,r}' = 1 + \frac{2\bar{I}_e(\bar{\omega}^2 - 1)}{(\bar{\omega}^2 - 1)^2 + \bar{\omega}^2\bar{\Delta}^2} \tag{21.150}$$

en

$$\varepsilon_{e,r}'' = -\frac{2\bar{I}_e\bar{\omega}\bar{\Delta}}{(\bar{\omega}^2 - 1)^2 + \bar{\omega}^2\bar{\Delta}^2}. \tag{21.151}$$

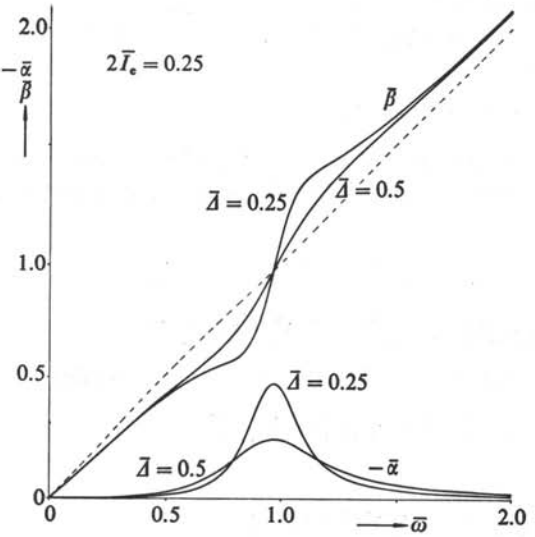


Fig. 39. Genormeerde (negatieve) verzwakkingscoëfficiënt $\bar{\alpha}$ en genormeerde fasecoëfficiënt $\bar{\beta}$ als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een diëlektricum met een gestimuleerde-emissielijn.

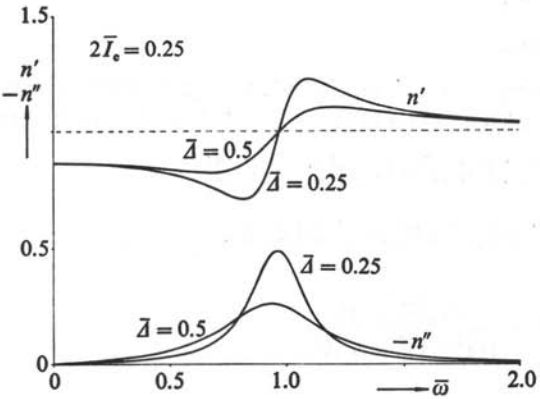


Fig. 40. Complexe brekingsindex als functie van de genormeerde frequentie $\bar{\omega}$ voor een diëlektricum met een gestimuleerde-emissielijn.

In Fig. 39 zijn $\bar{\alpha}$ en $\bar{\beta}$ als functie van $\bar{\omega}$ weergegeven; in Fig. 40 zijn n'' en n' als functie $\bar{\omega}$ weergegeven.

Daar $\alpha<0$, treedt in het beschouwde medium *versterking* van de golven op. Plaatst men een dergelijk medium in een resonator, dan ontstaat een oscillator die als *laser* bekend staat (LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 21.1. Laat zien, dat de Vergelijkingen (21.8) tot en met (21.13) zijn samen te vatten in de vectoriële vergelijkingen

$$\mathbf{i}_z \times \partial_z \mathbf{H} = \gamma Y \mathbf{E},$$
$$\mathbf{i}_z \times \partial_z \mathbf{E} = -\gamma Z \mathbf{H},$$

dan wel

$$-\partial_z \mathbf{H} = \gamma Y \mathbf{i}_z \times \mathbf{E},$$
$$-\partial_z \mathbf{E} = \gamma Z \mathbf{H} \times \mathbf{i}_z.$$

Vraagstuk 21.2. De oplossingen van de in Vraagstuk 21.1 verkregen vergelijkingen zijn te schrijven in de vorm

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^+ \exp(-\gamma z) + \mathbf{e}^- \exp(\gamma z),$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{h}^+ \exp(-\gamma z) + \mathbf{h}^- \exp(\gamma z).$$

Leid de betrekkingen af die er (a) tussen $\mathbf{e}^+$ en $\mathbf{h}^+$ en (b) tussen $\mathbf{e}^-$ en $\mathbf{h}^-$ bestaan.
Antwoord: (a) $\mathbf{e}^+ = Z(\mathbf{h}^+ \times \mathbf{i}_z)$, $\mathbf{h}^+ = Y(\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}^+)$; (b) $\mathbf{e}^- = Z(\mathbf{i}_z \times \mathbf{h}^-)$, $\mathbf{h}^- = Y(\mathbf{e}^- \times \mathbf{i}_z)$.

Vraagstuk 21.3. Druk de constante vectoren $\mathbf{e}^+$, $\mathbf{e}^-$, $\mathbf{h}^+$ en $\mathbf{h}^-$ die in Vraagstuk 21.2 zijn ingevoerd, uit in de waarden die $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ ter plaatse $z=0$ aannemen.
Antwoord: $\mathbf{e}^+ = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(0) + Z\{\mathbf{H}(0) \times \mathbf{i}_z\}]$, $\mathbf{e}^- = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(0) - Z\{\mathbf{H}(0) \times \mathbf{i}_z\}]$, $\mathbf{h}^+ = \frac{1}{2}[\mathbf{H}(0) + Y\{\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}(0)\}]$, $\mathbf{h}^- = \frac{1}{2}[\mathbf{H}(0) - Y\{\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}(0)\}]$.

Vraagstuk 21.4. Laat zien, dat met behulp van de in Vraagstuk 21.3 verkregen antwoorden de uitdrukkingen voor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z)$ die in Vraagstuk 21.2 zijn gegeven, te herschrijven zijn als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(0) \cosh(\gamma z) - Z\{\mathbf{H}(0) \times \mathbf{i}_z\} \sinh(\gamma z),$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(0) \cosh(\gamma z) - Y\{\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}(0)\} \sinh(\gamma z).$$

Vraagstuk 21.5. Tussen de frequentie f, de golflengte λ_0 en de voortplantingssnelheid c_0 van een sinusvormig met de tijd veranderende eendimensionale elektromagnetische golf in vacuüm bestaat de betrekking $\lambda_0 = c_0/f$. Welke frequentie heeft een golf waarvan de golflengte achtereenvolgens (a) 1 km, (b) 1 m, (c) 1 mm, (d) 1 μm en (e) 1 nm bedraagt?
Antwoord: (a) 2.9979×10^5 Hz, (b) 2.9979×10^8 Hz, (c) 2.9979×10^{11} Hz, (d) 2.9979×10^{14} Hz, (e) 2.9979×10^{17} Hz.

Vraagstuk 21.6. Een sinusvormig met de tijd veranderende, eendimensionale lopende elektromagnetische golf in vacuüm heeft een intensiteit van 1 watt/meter^2. Bepaal de piekwaarde E_{max} van de elektrische veldsterkte en de piekwaarde H_{max} van de magnetische veldsterkte van de golf.
Antwoord: $E_{max} = (2\mu_0 c_0)^{\frac{1}{2}} = 27.449$ volt/meter; $H_{max} = (2/\mu_0 c_0)^{\frac{1}{2}} = 7.2863 \times 10^{-2}$ ampère/meter.

Vraagstuk 21.7. Bepaal de matrix $[S]\ [T]^{-1}$ die de overdrachtsmatrix $[T]$ van een uniforme sectie van een medium transformeert in de verstrooiingsmatrix $[S]$ van de sectie. De sectie heeft een lengte d. (Merk op, dat $[S] = ([S]\ [T]^{-1})[T]$).
Antwoord:

$$[S]\ [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-2\gamma d) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vraagstuk 21.8. Bepaal de matrix $[T]\ [S]^{-1}$ die de verstrooiingsmatrix $[S]$ van een uniforme sectie van een medium transformeert in de overdrachtsmatrix $[T]$ van de sectie. De sectie heeft een lengte d. (Merk op, dat $[T] = ([T]\ [S]^{-1})[S]$).
Antwoord:

$$[T]\ [S]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \exp(2\gamma d) & 0 \end{bmatrix}.$$

Vraagstuk 21.9. In een medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma' = 0$, $\sigma'' = 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu' > 0$, $\mu'' = 0$ beschrijven de uitdrukkingen $E_x = C^+ \exp(-j\beta z) + C^- \exp(j\beta z)$, $H_y = (\varepsilon'/\mu')^{\frac{1}{2}}[C^+ \exp(-j\beta z) - C^- \exp(j\beta z)]$ een zuiver staande, sinusvormig met de tijd veranderende, eendimensionale elektromagnetische golf, indien $|C^+| = |C^-|$. Voor de fasecoëfficiënt β geldt $\beta = \omega(\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}}$. Van deze staande golf is gegeven, dat $E_x = 0$ voor $z = z_0$. Elimineer met behulp van dit gegeven C^- uit de uitdrukkingen voor E_x en H_y en herleid het resultaat.
Antwoord: $E_x = -2jC^+ \exp(-j\beta z_0) \sin[\beta(z - z_0)]$, $H_y = 2(\varepsilon'/\mu')^{\frac{1}{2}} C^+ \exp(-j\beta z_0) \times \cos[\beta(z - z_0)]$. (Merk op, dat tussen E_x en H_y het faseverschil $\pi/2$ radiaal bedraagt.)

Vraagstuk 21.10. De verzwakkingscoëfficiënt α en de fasecoëfficiënt β voor eendimensionale, sinusvormig met de tijd veranderende, elektromagnetische golven in een medium met constitutieve coëfficiënten $\sigma' > 0$, $\sigma'' = 0$, $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' = 0$, $\mu' > 0$, $\mu'' = 0$ zijn gegeven door de Vergelijkingen (21.75), resp. (21.76). Bepaal van de uitdrukkingen voor α resp. β de hoofdterm van de ontwikkeling voor (a) $\sigma'/\omega\varepsilon' \to 0$, (b) $\sigma'/\omega\varepsilon' \to \infty$.
Antwoord: (a) $\alpha \simeq \frac{1}{2}\sigma'(\mu'/\varepsilon')^{\frac{1}{2}}$ voor $\sigma'/\omega\varepsilon' \to 0$, $\beta \simeq \omega(\varepsilon'\mu')^{\frac{1}{2}}$ voor $\sigma'/\omega\varepsilon' \to 0$;
(b) $\alpha \simeq (\omega\mu'\sigma'/2)^{\frac{1}{2}}$ voor $\sigma'/\omega\varepsilon' \to \infty$, $\beta \simeq (\omega\mu'\sigma'/2)^{\frac{1}{2}}$ voor $\sigma'/\omega\varepsilon' \to \infty$.

Vraagstuk 21.11. Een zwerm identieke, vrije, elektrisch geladen deeltjes (botsingsvrij plasma) met lading q is onderworpen aan de elektrische kracht $q\mathbf{E}$ van een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderend elektromagnetisch veld; de invloed van de magnetische kracht wordt verwaarloosd ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ll c_0^2$). De bewegingsvergelijking van een deeltje van de zwerm luidt dan $m\,\mathrm{d}_t\mathbf{v} = q\mathbf{E}$. Voor de gedwongen trilling van het deeltje volgt hieruit $j\omega m\hat{\mathbf{v}} = q\hat{\mathbf{E}}$. Deze beweging van de deeltjes levert een bijdrage tot de elektrische stroomdichtheid met cirkelfrequentie ω van de gedaante $\hat{\mathbf{J}} = N_0 q\hat{\mathbf{v}}$, waarin N_0 de statische concentratie van de deeltjes voorstelt (zie hiervoor Vergelijking (18.13)). Met behulp van de uitdrukking voor $\hat{\mathbf{J}}$ is de (complexe) permittiviteit in het frequentiedomein

te bepalen via de betrekking $\hat{\mathbf{J}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}=\mathrm{j}\omega\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{E}}$. Bepaal $\hat{\varepsilon}$.
Antwoord: $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)$, waarin $\omega_p=(N_0q^2/\varepsilon_0m)^{\frac{1}{2}}$ de plasmacirkelfrequentie heet.

Vraagstuk 21.12. Een diëlektrisch materiaal wordt opgebouwd gedacht uit neutrale atomen. Elk atoom wordt opgevat als een beweegbare negatieve lading $-q$ die elastisch is gebonden aan een vaste positieve lading q. De atomen zijn onderworpen aan de elektrische kracht $q\mathbf{E}$ van een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderend elektromagnetisch veld; de invloed van de magnetische kracht wordt verwaarloosd ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\ll c_0^2$). Laat $\mathbf{u}$ de verplaatsing van de negatieve lading ten opzichte van de positieve lading aangeven, dan is de bewegingsvergelijking van de negatieve lading gegeven door $m(\mathrm{d}_t^2\mathbf{u}+\Delta\,\mathrm{d}_t\mathbf{u}+\omega_0^2\mathbf{u})=-q\mathbf{E}$, waarin m de massa van de negatieve lading voorstelt, Δ een maat voor de aanwezige demping is en ω_0 de cirkelfrequentie is waarbij mechanische resonantie in het elastische systeem optreedt. Dit systeem staat bekend als de „gedempte harmonische oscillator". Voor de gedwongen trilling van het systeem volgt uit de bewegingsvergelijking $m(-\omega^2+\mathrm{j}\omega\Delta+\omega_0^2)\hat{\mathbf{u}}=-q\hat{\mathbf{E}}$. Deze beweging van de atomen levert een bijdrage tot de elektrische polarisatie met cirkelfrequentie ω van de gedaante $\hat{\mathbf{P}}=-N_0q\hat{\mathbf{u}}$, waarin N_0 de statische concentratie van de atomen voorstelt (zie ook Vraagstuk 21.11). Met behulp van de uitdrukking voor $\hat{\mathbf{P}}$ is de complexe permittiviteit in het frequentiedomein te bepalen via de betrekking $\hat{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\hat{\mathbf{E}}+\hat{\mathbf{P}}=\hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{E}}$. Bepaal $\hat{\varepsilon}$.
Antwoord: $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0[1-\omega_p^2/(\omega^2-\omega_0^2-\mathrm{j}\omega\Delta)]$, waarin $\omega_p=(N_0q^2/\varepsilon_0m)^{\frac{1}{2}}$ de plasmacirkelfrequentie heet. (Hierbij is ondersteld, dat het diëlektricum uit atomen van één soort bestaat. Indien het diëlektricum uit atomen van verschillende soorten bestaat, dient de bijdrage tot $\hat{\mathbf{P}}$ van iedere soort apart in rekening te worden gebracht.)

Vraagstuk 21.13. In een metalen geleider zijn de geleidingselektronen onderworpen aan de elektrische kracht $-e\mathbf{E}$ van een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderend elektromagnetisch veld; de invloed van de magnetische kracht wordt verwaarloosd ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\ll c_0^2$). De bewegingsvergelijking van een elektron is dan gegeven door $m_e(\mathrm{d}_t\mathbf{v}+\nu_c\mathbf{v})=-e\mathbf{E}$. Hierin brengt de term $m_e\nu_c\mathbf{v}$ de invloed van de botsingen van het elektron met het atoomrooster in rekening (ν_c heet de botsingsfrequentie voor de impulsoverdracht). Voor de gedwongen trilling van het elektron geldt $m_e(\mathrm{j}\omega+\nu_c)\hat{\mathbf{v}}=-e\hat{\mathbf{E}}$. Deze beweging van de elektronen levert een bijdrage tot de elektrische stroomdichtheid met cirkelfrequentie ω van de gedaante $\hat{\mathbf{J}}=-N_0e\hat{\mathbf{v}}$, waarin N_0 de statische concentratie van de geleidingselektronen voorstelt (zie hiervoor Vergelijking (18.13)). Met behulp van de uitdrukking voor $\hat{\mathbf{J}}$ is de complexe soortelijke geleiding in het frequentiedomein te bepalen via de betrekking $\hat{\mathbf{J}}=\hat{\sigma}\hat{\mathbf{E}}$. Bepaal $\hat{\sigma}$.
Antwoord: $\hat{\sigma}=\varepsilon_0\omega_p^2/(\mathrm{j}\omega+\nu_c)$, waarin $\omega_p=(N_0e^2/\varepsilon_0m_e)^{\frac{1}{2}}$ de plasmacirkelfrequentie van de geleidingselektronen heet.

Vraagstuk 21.14. In een zgn. botsingsvrij *tweecomponentenplasma* zijn twee typen vrije. elektrisch geladen deeltjes aanwezig. De typen worden aangeduid als Type 1 en Type 2, De deeltjes zijn onderworpen aan de elektrische kracht van een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderend elektromagnetisch veld; de invloed van de magnetische kracht wordt verwaarloosd ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\ll c_0^2$). Leid met behulp van de in Vraagstuk 21.11 aangegeven methode af, dat de (complexe) permittiviteit in het frequentiedomein is gegeven door $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0[1-(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)/\omega^2]$, met $\omega_{p,1}=(N_{0,1}q_1^2/\varepsilon_0m_1)^{\frac{1}{2}}$ en $\omega_{p,2}=(N_{0,2}q_2^2/\varepsilon_0m_2)^{\frac{1}{2}}$, waarin de symbolen hun gebruikelijke betekenis hebben. Geef voor eendimensionale elektromagnetische golven in dit tweecomponentenplasma de uitdrukking voor (a) de verzwakkingscoëfficiënt α, (b) de fasecoëfficiënt β en (c) de complexe brekingsindex $n=n'-\mathrm{j}n''$.

Antwoord: (a) $\alpha = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}[(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)/\omega^2-1]^{\frac{1}{2}}$ voor $0<\omega<(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}$ en $\alpha=0$ voor $(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}<\omega<\infty$; (b) $\beta=0$ voor $0<\omega<(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}$ en $\beta=\omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}$ $\times[1-(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)/\omega^2]^{\frac{1}{2}}$ voor $(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}<\omega<\infty$; (c) $n''=[(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)/\omega^2-1]^{\frac{1}{2}}$ voor $0<\omega<(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}$ en $n''=0$ voor $(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}<\omega<\infty$, $n'=0$ voor $0<\omega<(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}$ en $n'=[1-(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)/\omega^2]^{\frac{1}{2}}$ voor $(\omega_{p,1}^2+\omega_{p,2}^2)^{\frac{1}{2}}<\omega<\infty$.

Vraagstuk 21.15. Aan een diëlektrisch materiaal wordt via een in de tijd voorbijgaand elektromagnetisch veld energie toegevoerd. De constitutieve coëfficiënten in het frequentiedomein van het materiaal zijn $\hat{\sigma}=0$, $\hat{\varepsilon}=\hat{\varepsilon}_e(\omega)$ en $\mu=\mu_0$, waarin $\hat{\varepsilon}_e(\omega)$ is gegeven door Vergelijking (21.135). De volumedichtheid van de netto toegevoerde energie is gegeven door $W=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{div}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t)]\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\partial_t\mathbf{D}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t$, daar $\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\partial_t\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\partial_t[\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)]\,\mathrm{d}t=0$. Bewijs met behulp van Vergelijking (16.30), dat $W=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},-\omega)\cdot\mathrm{j}\omega\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega$ en herleid dit resultaat tot $W=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\,\mathrm{Im}[\hat{\varepsilon}_e(\omega)]\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},-\omega)\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\mathrm{Im}[\hat{\varepsilon}_e(\omega)]\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)^*\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega=-\mathrm{Im}[(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\hat{\varepsilon}_e(\omega)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},-\omega)\cdot\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega]$. (Aanwijzing: bij de herleiding wordt gebruik gemaakt van de eigenschap, dat $\mathrm{Re}[\hat{\varepsilon}_e(\omega)]$ een even functie van ω is, zodat in het resultaat alleen $\mathrm{Im}[\hat{\varepsilon}_e(\omega)]$ een rol speelt. Merk op, dat $W<0$.)

Vraagstuk 21.16. Bewijs, dat $\mathrm{Im}[(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\hat{\varepsilon}_e(\omega)\,\mathrm{d}\omega]=\varepsilon_0 I_e$, waarin $\hat{\varepsilon}_e(\omega)$ is gegeven door Vergelijking (21.135). (Aanwijzing: Bepaal de integraal met behulp van contourintegratie in het complexe ω-vlak, waarbij de integratieweg $-\infty<\omega<\infty$ wordt aangevuld met een halve cirkelboog in het halfvlak $\mathrm{Im}(\omega)<0$. Let erop, dat de bijdrage langs deze cirkelboog niet verdwijnend klein is.)

22. De elektrische vlakkeplaatantenne met uniforme stroomverdeling

In Par. 21 hebben wij de voornaamste eigenschappen van eendimensionale elektromagnetische golven in een bronvrij gebied in een lineair, homogeen en isotroop medium behandeld. De vraag rijst dan, of er een bron van elektromagnetische straling te bedenken valt, die zulke golven opwekt. In deze paragraaf zullen wij laten zien, dat de elektrische vlakkeplaatantenne met uniforme stroomverdeling als zodanig kan dienen.

De elektrische vlakkeplaatantenne bestaat uit een oneindig uitgebreide, oneindig dunne, vlakke plaat waarin een sinusvormig met de tijd veranderende elektrische stroom loopt. Wij noemen de stroomverdeling in de plaat uniform, indien de complexe voorstelling* van de elektrische stroomdichtheid overal dezelfde waarde heeft. Om het door deze bron opgewekte elektromagnetische veld te bepalen, gebruiken wij een Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan het vlak $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $z=0$ samenvalt met het vlak van de antenne. Voor de elektrische stroomdichtheid in de plaat schrijven wij

$$\mathbf{J}_{\text{source}} = \mathbf{j}\delta(z), \tag{22.1}$$

waarin $\mathbf{j}=j_x\mathbf{i}_x+j_y\mathbf{i}_y$ een constante complexe vector is. De kentallen j_x en j_y van $\mathbf{j}$ stellen de stroom voor, die door een strook ter breedte gelijk aan 1 meter evenwijdig aan respectievelijk de x-as en de y-as in de plaat vloeit. De eenheidsstoot $\delta(z)$ in het rechterlid van (22.1) brengt tot uitdrukking, dat de stroomverdeling in het vlak $z=0$ is geconcentreerd. Daar $\partial_x j_x+\partial_y j_y=0$, geldt voor de met $\mathbf{J}_{\text{source}}$ corresponderende ladingsverdeling ρ_{source} op grond van de continuïteitsvergelijking (18.5)

$$\rho_{\text{source}} = 0. \tag{22.2}$$

Daar de gehele configuratie onafhankelijk van zowel x als y is, ligt het voor de hand om oplossingen van de elektromagnetische veldverge-

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

lijkingen te zoeken die alleen van z afhangen. In de bronvrije halfruimten $-\infty<z<0$ en $0<z<\infty$ zijn dit de eendimensionale golven die wij in Par. 21 hebben behandeld. Op fysische gronden zullen wij aan de opgewekte golven nog de voorwaarde opleggen, dat zij van de bron af lopen; deze voorwaarde staat in haar algemeenheid bekend als de *uitstralingsvoorwaarde.*

Vanwege het optreden van de eenheidsstoot $\delta(z)$ in de elektrische stroomdichtheid van de bron zal de magnetische veldsterkte een sprong vertonen bij doorgang door het vlak $z=0$. Daar de bijbehorende elektrische ladingsdichtheid verdwijnt, zal de elektrische veldsterkte continu zijn bij doorgang door het vlak $z=0$.

In Par. 21 is reeds opgemerkt, dat in het medium buiten de antenne de lineair gepolariseerde deelvelden $\{E_x, H_y\}$ en $\{E_y, H_x\}$ elkaar niet beïnvloeden. Verder zal blijken, dat het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_x, H_y\}$ alleen wordt opgewekt door de x-component van $\mathbf{J}_{\text{source}}$ en het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_y, H_x\}$ alleen door de y-component van $\mathbf{J}_{\text{source}}$. Daarom zullen wij de berekening van deze deelvelden gescheiden uitvoeren. De constitutieve coëfficiënten van het medium waarin de elektrische vlakkeplaatantenne aanwezig is, zullen wij — evenals in Par. 21 — met σ, ε en μ aanduiden.

(a) *Het deelveld $\{E_x, H_y\}$ dat wordt opgewekt door j_x*

In overeenstemming met de uitstralingsvoorwaarde en met (21.31) stellen wij

$$E_x = B^- \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty<z<0, \tag{22.3}$$

$$H_y = -YB^- \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty<z<0 \tag{22.4}$$

en

$$E_x = B^+ \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0<z<\infty, \tag{22.5}$$

$$H_y = YB^+ \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0<z<\infty. \tag{22.6}$$

Hierin is γ gegeven door (21.16) en Y door (21.33). De coëfficiënten B^- en B^+ moeten worden bepaald uit de (dis)continuïteitseisen bij doorgang door het vlak $z=0$, te weten

$$\lim_{z\uparrow 0} E_x = \lim_{z\downarrow 0} E_x \tag{22.7}$$

en

$$\lim_{z\uparrow 0} H_y - \lim_{z\downarrow 0} H_y = j_x. \tag{22.8}$$

Vergelijking (22.8) is in overeenstemming met (22.1) en is onder andere af te leiden uit de integraalvorm van de eerste vergelijking van MAXWELL in het frequentiedomein, toegepast op een rechthoekje met lange zijde evenwijdig aan de y-as en korte zijde evenwijdig aan de z-as. Substitutie van (22.3) en (22.5) in (22.7) en van (22.4) en (22.6) in (22.8) leidt tot

$$B^- = B^+, \tag{22.9}$$

$$-YB^- - YB^+ = j_x. \tag{22.10}$$

Hieruit volgt

$$B^- = -j_x/2Y = -\tfrac{1}{2}j_xZ, \tag{22.11}$$

$$B^+ = -j_x/2Y = -\tfrac{1}{2}j_xZ, \tag{22.12}$$

zodat voor de veldcomponenten wordt verkregen

$$E_x = -\tfrac{1}{2}j_xZ\exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty<z<0, \tag{22.13}$$

$$H_y = \tfrac{1}{2}j_x\exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty<z<0 \tag{22.14}$$

en

$$E_x = -\tfrac{1}{2}j_xZ\exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0<z<\infty, \tag{22.15}$$

$$H_y = -\tfrac{1}{2}j_x\exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0<z<\infty. \tag{22.16}$$

De over een periode gemiddelde waarde van het vermogen dat per vierkante meter oppervlakte door de plaatantenne wordt uitgestraald, wordt gegeven door

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \lim_{z\uparrow 0}\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(-E_xH_y^*)+\lim_{z\downarrow 0}\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(E_xH_y^*). \tag{22.17}$$

Substitutie van (22.13) tot en met (22.16) in (22.17) levert

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{4}|j_x|^2\,\mathrm{Re}(Z). \tag{22.18}$$

In de antennetheorie is het gebruikelijk het over een periode gemiddelde vermogen dat door de antenne wordt uitgestraald, in verband te brengen met de stroom I_0 in het voedingspunt via de betrekking

$$\langle P\rangle_T = \tfrac{1}{2}|I_0|^2R_{\mathrm{rad}}, \tag{22.19}$$

waarin R_{rad} de *stralingsweerstand* van de antenne wordt genoemd. Naar analogie hiermee stellen wij voor de elektrische vlakkeplaatantenne

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{2}|j_x|^2R_{\mathrm{rad}} \tag{22.20}$$

en noemen R_{rad} de stralingsweerstand van de elektrische vlakkeplaatantenne. Uit (22.18) en (22.20) verkrijgt men

$$R_{\mathrm{rad}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z). \tag{22.21}$$

(b) *Het deelveld* $\{E_y, H_x\}$ *dat wordt opgewekt door* j_y

In overeenstemming met de uitstralingsvoorwaarde en met (21.36) stellen wij

$$E_y = B^- \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty < z < 0, \tag{22.22}$$

$$H_x = YB^- \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty < z < 0 \tag{22.23}$$

en

$$E_y = B^+ \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0 < z < \infty, \tag{22.24}$$

$$H_x = -YB^+ \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0 < z < \infty. \tag{22.25}$$

Hierin is γ gegeven door (21.16) en Y door (21.33). De coëfficiënten B^- en B^+ moeten worden bepaald uit de (dis)continuïteitseisen bij doorgang door het vlak $z = 0$, te weten

$$\lim_{z\uparrow 0} E_y = \lim_{z\downarrow 0} E_y \tag{22.26}$$

en

$$\lim_{z\uparrow 0} H_x - \lim_{z\downarrow 0} H_x = -j_y. \tag{22.27}$$

Vergelijking (22.27) is in overeenstemming met (22.1) en is onder andere af te leiden uit de integraalvorm van de eerste vergelijking van MAXWELL in het frequentiedomein, toegepast op een rechthoekje met lange zijde evenwijdig aan de x-as en korte zijde evenwijdig aan de z-as. Substitutie van (22.22) en (22.24) in (22.26) en van (22.23) en (22.25) in (22.27) leidt tot

$$B^- = B^+, \tag{22.28}$$

$$YB^- + YB^+ = -j_y. \tag{22.29}$$

Hieruit volgt

$$B^- = -j_y/2Y = -\tfrac{1}{2} j_y Z, \tag{22.30}$$

$$B^+ = -j_y/2Y = -\tfrac{1}{2} j_y Z, \tag{22.31}$$

zodat voor de veldcomponenten wordt verkregen

$$E_y = -\tfrac{1}{2} j_y Z \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty < z < 0, \tag{22.32}$$

$$H_x = -\tfrac{1}{2} j_y \exp(\gamma z) \qquad \text{voor } -\infty < z < 0 \tag{22.33}$$

en

$$E_y = -\tfrac{1}{2} j_y Z \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0 < z < \infty, \tag{22.34}$$

$$H_x = \tfrac{1}{2} j_y \exp(-\gamma z) \qquad \text{voor } 0 < z < \infty. \tag{22.35}$$

De over een periode gemiddelde waarde van het vermogen dat per vierkante meter oppervlakte door de plaatantenne wordt uitgestraald, wordt gegeven door

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \lim_{z\uparrow 0} \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(E_y H_x^*) + \lim_{z\downarrow 0} \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(-E_y H_x^*). \tag{22.36}$$

Substitutie van (22.32) tot en met (22.35) in (22.36) levert

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{4}|j_y|^2\,\mathrm{Re}(Z). \tag{22.37}$$

Naar analogie met (22.19) stellen wij

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{2}|j_y|^2 R_{\mathrm{rad}}, \tag{22.38}$$

waarin R_{rad} wederom de stralingsweerstand van de elektrische vlakkeplaatantenne voorstelt. Uit (22.37) en (22.38) wordt verkregen

$$R_{\mathrm{rad}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z). \tag{22.39}$$

Voor de superpositie van de onder (a) en (b) bepaalde deelvelden geldt (zie (21.40))

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{4}(|j_x|^2 + |j_y|^2)\,\mathrm{Re}(Z). \tag{22.40}$$

Stelt men in dit geval

$$\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}^*) R_{\mathrm{rad}}, \tag{22.41}$$

dan is de stralingsweerstand R_{rad} wederom gegeven door

$$R_{\mathrm{rad}} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z). \tag{22.42}$$

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 22.1. Geef de waarde van de stralingsweerstand van een elektrische vlakkeplaatantenne met uniforme stroomverdeling, die is geplaatst in vacuüm.
Antwoord: $R_{\mathrm{rad}} = \tfrac{1}{2}(\mu_0/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} = 188.365$ ohm.

Vraagstuk 22.2. Een elektrische vlakkeplaatantenne met uniforme stroomverdeling $\mathbf{j} = j_x\mathbf{i}_x + j_y\mathbf{i}_y$ is geplaatst in het scheidingsvlak $z = 0$ van twee lineaire, homogene en isotrope media. Het medium in de halfruimte $-\infty < z < 0$ heeft de constitutieve coëfficiënten σ_1, ε_1 en μ_1; het medium in de halfruimte $0 < z < \infty$ heeft de constitutieve coëfficiënten σ_2, ε_2 en μ_2. Bereken de veldcomponenten van (a) het deelveld $\{E_x, H_y\}$ en (b) het deelveld $\{E_y, H_x\}$.
Antwoord: (a) $E_x = B_1\exp(\gamma_1 z)$ en $H_y = -Y_1 B_1\exp(\gamma_1 z)$ voor $-\infty < z < 0$, $E_x = B_2\exp(-\gamma_2 z)$ en $H_y = Y_2 B_2\exp(-\gamma_2 z)$ voor $0 < z < \infty$, met $B_1 = B_2 = -j_x/(Y_1 + Y_2)$; (b) $E_y = B_1\exp(\gamma_1 z)$ en $H_x = Y_1 B_1\exp(\gamma_1 z)$ voor $-\infty < z < 0$, $E_y = B_2\exp(-\gamma_2 z)$ en $H_x = -Y_2 B_2\exp(-\gamma_2 z)$ voor $0 < z < \infty$, met $B_1 = B_2 = -j_y/(Y_1 + Y_2)$.

Vraagstuk 22.3. Bepaal voor de antenne in Vraagstuk 22.2 de grootheid $\langle P^{(1)}\rangle_T$. Voer de stralingsweerstand R_{rad} van de antenne in via de betrekking $\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}^*) R_{\mathrm{rad}}$ en bepaal R_{rad}.
Antwoord: $\langle P^{(1)}\rangle_T = \tfrac{1}{2}(|j_x|^2 + |j_y|^2)\,\mathrm{Re}[(Y_1 + Y_2)^{-1}] = \tfrac{1}{2}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}^*)\,\mathrm{Re}[Z_1 Z_2/(Z_1 + Z_2)]$; $R_{\mathrm{rad}} = \mathrm{Re}[Z_1 Z_2/(Z_1 + Z_2)]$.

23. Reflectie tegen en transmissie door een plat scheidingsvlak tussen twee media. Overdrachtsmatrix en verstrooiingsmatrix voor eendimensionale elektromagnetische golven

In deze paragraaf bestuderen wij de invloed die een plat scheidingsvlak tussen twee media met verschillende elektromagnetische eigenschappen uitoefent op eendimensionale elektromagnetische golven die in de media ter weerszijden van het grensvlak aanwezig zijn. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; als complexe tijdfactor gebruiken wij $\exp(j\omega t)$. Om de plaats in de ruimte vast te leggen, gebruiken wij een rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan het vlak $z = 0$ samenvalt met het scheidingsvlak tussen de twee media (Fig. 41).

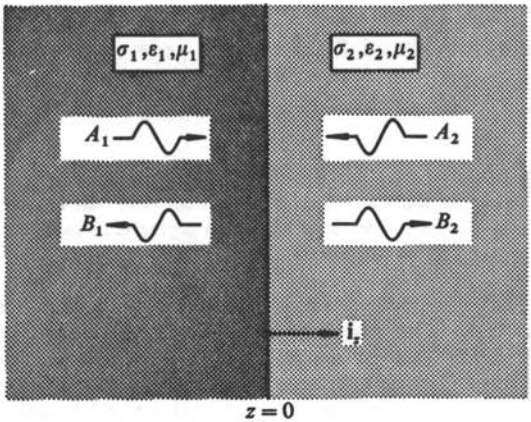


Fig. 41. Reflectie tegen en transmissie door een plat scheidingsvlak tussen twee media (eendimensionale elektromagnetische golven).

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

Omtrent de media die ter weerszijden van het scheidingsvlak aanwezig zijn, onderstellen wij dat zij beide lineair, homogeen en isotroop zijn en dat hun constitutieve vergelijkingen van de gedaante (21.5) t/m (21.7) zijn. Wat de constitutieve coëfficiënten betreft, stellen wij

$$\sigma = \sigma_1, \qquad \varepsilon = \varepsilon_1, \qquad \mu = \mu_1 \qquad \text{voor } z < 0 \tag{23.1}$$

en

$$\sigma = \sigma_2, \qquad \varepsilon = \varepsilon_2, \qquad \mu = \mu_2 \qquad \text{voor } z > 0. \tag{23.2}$$

In de media zijn — alleen van z afhankelijke — eendimensionale elektromagnetische velden aanwezig, die wij kunnen splitsen in golven in de positieve z-richting en golven in de negatieve z-richting, ofwel in golven naar het scheidingsvlak toe en golven van het scheidingsvlak af. Koppeling tussen de velden vindt plaats via de randvoorwaarden bij doorgang door een scheidingsvlak. Hiervoor geldt (zie (18.21) en (18.22), met $\mathbf{v} = \mathbf{i}_z$)

$$\lim_{z \uparrow 0} E_{x,1} = \lim_{z \downarrow 0} E_{x,2}, \tag{23.3}$$

$$\lim_{z \uparrow 0} E_{y,1} = \lim_{z \downarrow 0} E_{y,2}, \tag{23.4}$$

$$\lim_{z \uparrow 0} H_{x,1} = \lim_{z \downarrow 0} H_{x,2}, \tag{23.5}$$

$$\lim_{z \uparrow 0} H_{y,1} = \lim_{z \downarrow 0} H_{y,2}. \tag{23.6}$$

Uit de in Par. 21 behandelde theorie is bekend, dat er in de media ter weerszijden van het scheidingsvlak geen koppeling optreedt tussen de lineair gepolariseerde deelvelden $\{E_x, H_y\}$ en $\{E_y, H_x\}$. Uit (23.3) t/m (23.6) blijkt, dat ook de randvoorwaarden niet tot een koppeling tussen de beide deelvelden leiden. Als gevolg hiervan kunnen de berekeningen voor de beide deelvelden geheel gescheiden worden uitgevoerd. Het zal dan blijken, dat voor beide deelvelden de overdrachtsmatrices dezelfde zijn, evenals de verstrooiingsmatrices. Wel verschilt voor een scheidingsvlak de overdrachtsmatrix op basis van de elektrische veldsterkte van de overdrachtsmatrix op basis van de magnetische veldsterkte, in tegenstelling tot wat voor een uniforme sectie het geval is (zie Par. 21). Hetzelfde geldt ten aanzien van de verstrooiingsmatrix.

Voor de berekeningen maken wij wederom gebruik van de golfmatrix voor een bepaalde component van het elektromagnetische veld. Daarbij kiezen wij het scheidingsvlak $z = 0$ als referentievlak. In Medium 1 voeren wij de golfmatrix

$$[\Psi_1] = \begin{bmatrix} \Psi_1^-(z) \\ \Psi_1^+(z) \end{bmatrix} \quad \text{voor } z < 0 \tag{23.7}$$

en in Medium 2 de golfmatrix

$$[\Psi_2] = \begin{bmatrix} \Psi_2^-(z) \\ \Psi_2^+(z) \end{bmatrix} \quad \text{voor } z > 0 \tag{23.8}$$

in. De *overdrachtsmatrix van de overgang van Medium 1 naar Medium 2*, aan te duiden met $[T_{1\to 2}]$, volgt dan uit de betrekking

$$\lim_{z\uparrow 0} [\Psi_1(z)] = [T_{1\to 2}] \lim_{z\downarrow 0} [\Psi_2(z)]. \tag{23.9}$$

Om de verstrooiingsmatrix te bepalen, voeren wij de kolommatrix $[A]$ van de complexe amplitudes van de golven naar het scheidingsvlak toe en de kolommatrix $[B]$ van de complexe amplitudes van de golven van het scheidingsvlak af in, beide betrokken op het referentievlak $z = 0$. Hiervoor geldt

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{z\uparrow 0} \Psi_1^+(z) \\ \lim_{z\downarrow 0} \Psi_2^-(z) \end{bmatrix} \tag{23.10}$$

en

$$[B] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{z\uparrow 0} \Psi_1^-(z) \\ \lim_{z\downarrow 0} \Psi_2^+(z) \end{bmatrix}. \tag{23.11}$$

De *verstrooiingsmatrix van de overgang tussen Medium 1 en Medium 2*, aan te duiden met $[S_{1\leftrightarrow 2}]$, volgt dan uit de betrekking

$$[B] = [S_{1\leftrightarrow 2}]\,[A]. \tag{23.12}$$

De elementen van de verstrooiingsmatrix hebben de betekenis van reflectie-, respectievelijk transmissiefactoren. Stel

$$[S_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{bmatrix}, \tag{23.13}$$

dan zijn

$$S_{1,1} = (B_1/A_1)_{A_2=0} \tag{23.14}$$

en

$$S_{2,2} = (B_2/A_2)_{A_1=0} \tag{23.15}$$

reflectiefactoren en

$$S_{1,2} = (B_1/A_2)_{A_1=0} \tag{23.16}$$

en

$$S_{2,1} = (B_2/A_1)_{A_2=0} \tag{23.17}$$

transmissiefactoren.

Op grond van (21.22), (21.23), (23.10) en (23.11) kunnen wij de elementen van de golfmatrices schrijven als

$$\Psi_1^+ = A_1 \exp(-\gamma_1 z), \tag{23.18}$$

$$\Psi_1^- = B_1 \exp(\gamma_1 z), \tag{23.19}$$

$$\Psi_2^+ = B_2 \exp(-\gamma_2 z), \tag{23.20}$$

$$\Psi_2^- = A_2 \exp(\gamma_2 z), \tag{23.21}$$

waarin

$$\gamma_1 = [(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, j\omega\mu_1]^{\frac{1}{2}} \tag{23.22}$$

en

$$\gamma_2 = [(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, j\omega\mu_2]^{\frac{1}{2}}. \tag{23.23}$$

In het gebied van de infrarode en optische frequenties is doorgaans het meten van de complexe amplitudes van de veldcomponenten onuitvoerbaar en leiden reflectie- en transmissiemetingen tot gegevens met betrekking tot de intensiteiten van de golven naar het scheidingsvlak toe en die van het scheidingsvlak af. Met het oog op de analyse van deze meetresultaten voert men naast de verstrooiingsmatrix $[S_{1\leftrightarrow 2}]$ op basis van de complexe amplitudes de zgn. *vermogensverstrooiingsmatrix* $[P_{1\leftrightarrow 2}]$ in. Laten $\{I_1^+, I_1^-, I_2^+, I_2^-\}$ de intensiteiten van de met $\{\Psi_1^+, \Psi_1^-, \Psi_2^+, \Psi_2^-\}$ corresponderende golven zijn, dan volgt de vermogensverstrooiingsmatrix, die wij schrijven als

$$[P_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{bmatrix}, \tag{23.24}$$

uit de betrekking

$$\begin{bmatrix} \lim_{z\uparrow 0} I_1^-(z) \\ \lim_{z\downarrow 0} I_2^+(z) \end{bmatrix} = [P_{1\leftrightarrow 2}] \begin{bmatrix} \lim_{z\uparrow 0} I_1^+(z) \\ \lim_{z\downarrow 0} I_2^-(z) \end{bmatrix}. \tag{23.25}$$

Hierin zijn $P_{1,1}$ en $P_{2,2}$ vermogensreflectiefactoren, ook *reflectanties* genoemd, en $P_{1,2}$ en $P_{2,1}$ vermogenstransmissiefactoren, ook *transmittanties* genoemd. Bij de gehele analyse op basis van de intensiteiten

dient men in het oog te houden, dat in het algemeen $I_1 \neq I_1^+ - I_1^-$ en $I_2 \neq I_2^+ - I_2^-$ (zie (21.45)).

(a) *Analyse op basis van de elektrische veldsterkte*

In de eerste plaats voeren wij de analyse uit op basis van de elektrische veldsterkte. Wij beschouwen het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_x, H_y\}$ en stellen

$$E_{x,1} = A_1 \exp(-\gamma_1 z) + B_1 \exp(\gamma_1 z) \qquad \text{voor } z < 0. \quad (23.26)$$

Dan is

$$H_{y,1} = Y_1[A_1 \exp(-\gamma_1 z) - B_1 \exp(\gamma_1 z)] \qquad \text{voor } z < 0. \quad (23.27)$$

Evenzo stellen wij

$$E_{x,2} = B_2 \exp(-\gamma_2 z) + A_2 \exp(\gamma_2 z) \qquad \text{voor } z > 0. \quad (23.28)$$

Dan is

$$H_{y,2} = Y_2[B_2 \exp(-\gamma_2 z) - A_2 \exp(\gamma_2 z)] \qquad \text{voor } z > 0. \quad (23.29)$$

Hierin is

$$Y_1 = \gamma_1/j\omega\mu_1 \quad (23.30)$$

en

$$Y_2 = \gamma_2/j\omega\mu_2. \quad (23.31)$$

Toepassing van de randvoorwaarden (23.3) en (23.6) leidt tot de volgende betrekkingen

$$A_1 + B_1 = B_2 + A_2, \quad (23.32)$$

$$Y_1(A_1 - B_1) = Y_2(B_2 - A_2). \quad (23.33)$$

Voor de overdrachtsmatrix $[T^E_{1\to 2}]$ op basis van de elektrische veldsterkte wordt uit (23.9), (23.32) en (23.33) verkregen

$$[T^E_{1\to 2}] = \frac{1}{2Y_1}\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & Y_1 - Y_2 \\ Y_1 - Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix}. \quad (23.34)$$

Voor de verstrooiingsmatrix $[S^E_{1\leftrightarrow 2}]$ op basis van de elektrische veldsterkte wordt uit (23.12), (23.32) en (23.33) verkregen

$$[S^E_{1\leftrightarrow 2}] = \frac{1}{Y_1 + Y_2}\begin{bmatrix} Y_1 - Y_2 & 2Y_2 \\ 2Y_1 & Y_2 - Y_1 \end{bmatrix}. \quad (23.35)$$

Wij voeren nu de reflectiefactor $\rho^E_{1,2}$ in — op basis van de elektrische veldsterkte — van de golf in Medium 1 die tegen de overgang van Medium 1 naar Medium 2 is gereflecteerd. Daar $\rho^E_{1,2} = S^E_{1,1}$, volgt uit (23.13) en (23.35)

$$\rho^E_{1,2} = (Y_1 - Y_2)/(Y_1 + Y_2). \tag{23.36}$$

Evenzo is dan de reflectiefactor $\rho^E_{2,1}$ op basis van de elektrische veldsterkte van de golf in Medium 2 die tegen de overgang van Medium 2 naar Medium 1 is gereflecteerd, gegeven door

$$\rho^E_{2,1} = (Y_2 - Y_1)/(Y_2 + Y_1). \tag{23.37}$$

Dit is in overeenstemming met (23.13) en (23.35), terwijl verder $\rho^E_{2,1} = -\rho^E_{1,2}$, zoals uit (23.36) en (23.37) volgt. Met behulp van deze reflectiefactoren is $[T^E_{1\to 2}]$ te schrijven als

$$[T^E_{1\to 2}] = \frac{1}{1+\rho^E_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho^E_{1,2} \\ \rho^E_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \tag{23.38}$$

en $[S^E_{1\leftrightarrow 2}]$ als

$$[S^E_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} \rho^E_{1,2} & 1-\rho^E_{1,2} \\ 1-\rho^E_{2,1} & \rho^E_{2,1} \end{bmatrix}. \tag{23.39}$$

Om de elementen van de vermogensverstrooiingsmatrix te berekenen, bepalen wij eerst met behulp van (21.43), (21.44), (23.26) en (23.28) de intensiteiten:

$$I^+_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Y^*_1)\,|A_1|^2 \exp(-2\alpha_1 z) \qquad \text{voor } z < 0, \tag{23.40}$$

$$I^-_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Y^*_1)\,|B_1|^2 \exp(2\alpha_1 z) \qquad \text{voor } z < 0, \tag{23.41}$$

$$I^+_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Y^*_2)\,|B_2|^2 \exp(-2\alpha_2 z) \qquad \text{voor } z > 0, \tag{23.42}$$

$$I^-_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Y^*_2)\,|A_2|^2 \exp(2\alpha_2 z) \qquad \text{voor } z > 0. \tag{23.43}$$

Substitutie van (23.40) t/m (23.43) in (23.25) leidt met gebruikmaking van (23.24) en (23.39) tot

$$P^E_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2, \tag{23.44}$$

$$P^E_{1,2} = [\mathrm{Re}(Y^*_1)/\mathrm{Re}(Y^*_2)]\,|1-\rho^E_{1,2}|^2, \tag{23.45}$$

$$P^E_{2,1} = [\mathrm{Re}(Y^*_2)/\mathrm{Re}(Y^*_1)]\,|1-\rho^E_{2,1}|^2, \tag{23.46}$$

$$P^E_{2,2} = |\rho^E_{2,1}|^2. \tag{23.47}$$

Het is eenvoudig na te gaan, dat de overdrachtsmatrix voor het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_y, H_x\}$ dezelfde is als die voor het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_x, H_y\}$. Hetzelfde geldt voor de verstrooiingsmatrix en de vermogensverstrooiingsmatrix.

(b) *Analyse op basis van de magnetische veldsterkte*

In de tweede plaats voeren wij de analyse uit op basis van de magnetische veldsterkte. Wij beschouwen wederom het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_x, H_y\}$ en stellen

$$H_{y,1} = A_1 \exp(-\gamma_1 z) + B_1 \exp(\gamma_1 z) \qquad \text{voor } z < 0. \quad (23.48)$$

Dan is

$$E_{x,1} = Z_1[A_1 \exp(-\gamma_1 z) - B_1 \exp(\gamma_1 z)] \qquad \text{voor } z < 0. \quad (23.49)$$

Evenzo stellen wij

$$H_{y,2} = B_2 \exp(-\gamma_2 z) + A_2 \exp(\gamma_2 z) \qquad \text{voor } z > 0. \quad (23.50)$$

Dan is

$$E_{x,2} = Z_2[B_2 \exp(-\gamma_2 z) - A_2 \exp(\gamma_2 z)] \qquad \text{voor } z > 0. \quad (23.51)$$

Hierin is

$$Z_1 = \gamma_1/(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1) \quad (23.52)$$

en

$$Z_2 = \gamma_2/(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2). \quad (23.53)$$

Toepassing van de randvoorwaarden (23.3) en (23.6) leidt tot de volgende betrekkingen

$$Z_1(A_1 - B_1) = Z_2(B_2 - A_2), \quad (23.54)$$

$$A_1 + B_1 = B_2 + A_2. \quad (23.55)$$

Opgemerkt wordt, dat het stelsel vergelijkingen (23.54)–(23.55) dezelfde vorm heeft als het stelsel vergelijkingen (23.32)–(23.33). De verdere berekeningen verlopen derhalve geheel analoog met die van de analyse op basis van de elektrische veldsterkte. Voor de overdrachtsmatrix $[T^H_{1\to 2}]$ op basis van de magnetische veldsterkte wordt uit (23.9), (23.54) en (23.55) verkregen

$$[T^H_{1\to 2}] = \frac{1}{2Z_1}\begin{bmatrix} Z_1+Z_2 & Z_1-Z_2 \\ Z_1-Z_2 & Z_1+Z_2 \end{bmatrix}. \quad (23.56)$$

Voor de verstrooiingsmatrix $[S^H_{1\leftrightarrow 2}]$ op basis van de magnetische veldsterkte wordt uit (23.12), (23.54) en (23.55) verkregen

$$[S^H_{1\leftrightarrow 2}] = \frac{1}{Z_1+Z_2}\begin{bmatrix} Z_1-Z_2 & 2Z_2 \\ 2Z_1 & Z_2-Z_1 \end{bmatrix}. \tag{23.57}$$

Wij voeren nu de reflectiefactor $\rho^H_{1,2}$ — op basis van de magnetische veldsterkte — in van de golf in Medium 1 die tegen de overgang van Medium 1 naar Medium 2 is gereflecteerd. Daar $\rho^H_{1,2} = S^H_{1,1}$, volgt uit (23.13) en (23.57)

$$\rho^H_{1,2} = (Z_1-Z_2)/(Z_1+Z_2). \tag{23.58}$$

Evenzo is dan de reflectiefactor $\rho^H_{2,1}$ op basis van de magnetische veldsterkte van de golf in Medium 2 die tegen de overgang van Medium 2 naar Medium 1 is gereflecteerd, gegeven door

$$\rho^H_{2,1} = (Z_2-Z_1)/(Z_2+Z_1). \tag{23.59}$$

Dit is in overeenstemming met (23.13) en (23.57), terwijl verder $\rho^H_{2,1} = -\rho^H_{1,2}$, zoals uit (23.58) en (23.59) volgt. Met behulp van deze reflectiefactoren is $[T^H_{1\rightarrow 2}]$ te schrijven als

$$[T^H_{1\rightarrow 2}] = \frac{1}{1+\rho^H_{1,2}}\begin{bmatrix} 1 & \rho^H_{1,2} \\ \rho^H_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \tag{23.60}$$

en $[S^H_{1\leftrightarrow 2}]$ als

$$[S^H_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} \rho^H_{1,2} & 1-\rho^H_{1,2} \\ 1-\rho^H_{2,1} & \rho^H_{2,1} \end{bmatrix}. \tag{23.61}$$

Om de elementen van de vermogensverstrooiingsmatrix te berekenen, bepalen wij eerst met behulp van (21.43), (21.44), (23.48) en (23.50) de intensiteiten:

$$I_1^+ = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z_1)\,|A_1|^2 \exp(-2\alpha_1 z) \qquad \text{voor } z<0, \tag{23.62}$$

$$I_1^- = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z_1)\,|B_1|^2 \exp(2\alpha_1 z) \qquad \text{voor } z<0, \tag{23.63}$$

$$I_2^+ = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z_2)\,|B_2|^2 \exp(-2\alpha_2 z) \qquad \text{voor } z>0, \tag{23.64}$$

$$I_2^- = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z_2)\,|A_2|^2 \exp(2\alpha_2 z) \qquad \text{voor } z>0. \tag{23.65}$$

Substitutie van (23.62) t/m (23.65) in (23.25) leidt met gebruikmaking van (23.24) en (23.61) tot

$$P^H_{1,1} = |\rho^H_{1,2}|^2, \tag{23.66}$$

$$P^H_{1,2} = [\mathrm{Re}(Z_1)/\mathrm{Re}(Z_2)]\,|1-\rho^H_{1,2}|^2, \tag{23.67}$$

$$P^H_{2,1} = [\mathrm{Re}(Z_2)/\mathrm{Re}(Z_1)]\,|1-\rho^H_{2,1}|^2, \tag{23.68}$$

$$P^H_{2,2} = |\rho^H_{2,1}|^2. \tag{23.69}$$

Opgemerkt wordt, dat alle onder (b) verkregen resultaten uit die onder (a) ontstaan door in de laatste Y_1 door Z_1 en Y_2 door Z_2 te vervangen.

Het is eenvoudig na te gaan, dat de overdrachtsmatrix voor het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_y, H_x\}$ dezelfde is als die voor het lineair gepolariseerde deelveld $\{E_x, H_y\}$. Hetzelfde geldt voor de verstrooiingsmatrix en de vermogensverstrooiingsmatrix.

Met betrekking tot de vermogensverstrooiingsmatrix valt nog op te merken, dat de elementen berekend via de analyse op basis van de elektrische veldsterkte gelijk zijn aan de overeenkomstige elementen berekend via de analyse op basis van de magnetische veldsterkte. Dit blijkt door in de rechterleden van (23.44) t/m (23.47) en (23.66) t/m (23.69) de uitdrukkingen voor de reflectiefactoren te substitueren en de verkregen resultaten op elkaar te herleiden. Op grond hiervan laten wij bij de vermogensverstrooiingsmatrix de opschriften ‚E' en ‚H' weg. Het resultaat is dan, dat

$$P_{1,1} = P_{2,2} = \left|\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2}\right|^2 = \left|\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right|^2, \tag{23.70}$$

$$P_{1,2} = \frac{\mathrm{Re}(Y_1^*)}{\mathrm{Re}(Y_2^*)}\left|\frac{2Y_2}{Y_1+Y_2}\right|^2 = \frac{\mathrm{Re}(Z_1)}{\mathrm{Re}(Z_2)}\left|\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}\right|^2, \tag{23.71}$$

$$P_{2,1} = \frac{\mathrm{Re}(Y_2^*)}{\mathrm{Re}(Y_1^*)}\left|\frac{2Y_1}{Y_1+Y_2}\right|^2 = \frac{\mathrm{Re}(Z_2)}{\mathrm{Re}(Z_1)}\left|\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\right|^2. \tag{23.72}$$

Opgemerkt wordt, dat $P_{1,2} = P_{2,1} = 4Y_1Y_2/(Y_1+Y_2)^2 = 4Z_1Z_2/(Z_1+Z_2)^2$ in het geval, dat de golfadmittanties (en ook de golfimpedanties) van de beide media reëel en positief zijn; dan is tevens $P_{1,1}+P_{1,2}=P_{2,1}+P_{2,2}=1$.

De hier verkregen resultaten vinden onder andere toepassing in het experimentele onderzoek van de elektromagnetische eigenschappen van een materiaal. Men gaat hierbij als volgt te werk. Op een plat grensvlak van het te onderzoeken materiaal laat men vanuit lucht (of vacuüm) elektromagnetische straling invallen en men meet welk deel van de invallende straling door het grensvlak wordt gereflecteerd. De meting

geschiedt doorgaans op basis van de intensiteit. Door de reflectantie bij verschillende frequenties te meten, verkrijgt men de zogenaamde reflectantiekromme, dit wil zeggen het diagram waarin de reflectantie als functie van de frequentie (of als functie van de golflengte in vacuüm) wordt uitgezet. Uit deze reflectantiekromme zijn bepaalde gegevens omtrent de grootheden die de elektromagnetische eigenschappen van een materiaal karakteriseren, af te leiden.

In eerste aanleg bepaalt men via deze meetmethode $P_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2 = |\rho^H_{1,2}|^2$. Hieruit volgt onmiddellijk de waarde van $|\rho^E_{1,2}| = |\rho^H_{1,2}|$. Vervolgens kunnen $\arg(\rho^E_{1,2})$ en $\arg(\rho^H_{1,2})$ worden berekend door de uit Vraagstuk 19.3 volgende uitdrukkingen voor $\arg(\rho^E_{1,2})$ en $\arg(\rho^H_{1,2})$ te gebruiken en de integraal in het rechterlid (laatste resultaat) numeriek of grafisch te bepalen. (Bij toepassing van de laatste methode verdient het aanbeveling om de gemeten reflectantie op logaritmische schaal uit te zetten.) Merk hierbij op, dat $\arg(\rho^E_{1,2}) - \arg(\rho^H_{1,2}) = \pm\pi$.

Een van de methoden om snel enige conclusies uit de gemeten resultaten te trekken, is de gemeten reflectantiekromme te vergelijken met langs theoretische weg bepaalde reflectantiekrommen voor een aantal materialen met bekende elektromagnetische eigenschappen. Met het oog hierop geven wij hieronder de reflectantiekrommen voor een aantal materialen die in Par. 21 zijn besproken. Voor Medium 1 kiezen wij steeds vacuüm, zodat $\sigma_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ en $\mu_1 = \mu_0$. Dan is

$$Y_1 = (\varepsilon_0/\mu_0)^{\frac{1}{2}} = Y_0 \tag{23.73}$$

en

$$Y_2 = \gamma_2/\mathrm{j}\omega\mu_2 = \mathrm{j}\omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}\, n_2/\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_{\mathrm{r},2} = Y_0 n_2/\mu_{\mathrm{r},2}\,, \tag{23.74}$$

zodat

$$P_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2 = |\rho^H_{1,2}|^2 = \left|\frac{1-n_2/\mu_{\mathrm{r},2}}{1+n_2/\mu_{\mathrm{r},2}}\right|^2. \tag{23.75}$$

Vergelijking (23.75) dient als uitgangspunt voor de berekeningen, waarbij de in Par. 21 verkregen resultaten met betrekking tot het reële en imaginaire deel van n_2 kunnen worden gebruikt. Achtereenvolgens worden hieronder weergegeven de reflectantiekrommen voor: een materiaal waarvoor σ, ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn (Fig. 42), een botsingsvrij plasma (Fig. 43), een diëlektrisch materiaal met een absorptielijn (Fig. 44) en een metaal (Fig. 45).

Een diepgaande analyse van de reflectantiekromme van een bepaald materiaal kan een aantal kenmerkende grootheden met betrekking tot de elektromagnetische eigenschappen van dit materiaal aan het licht brengen.

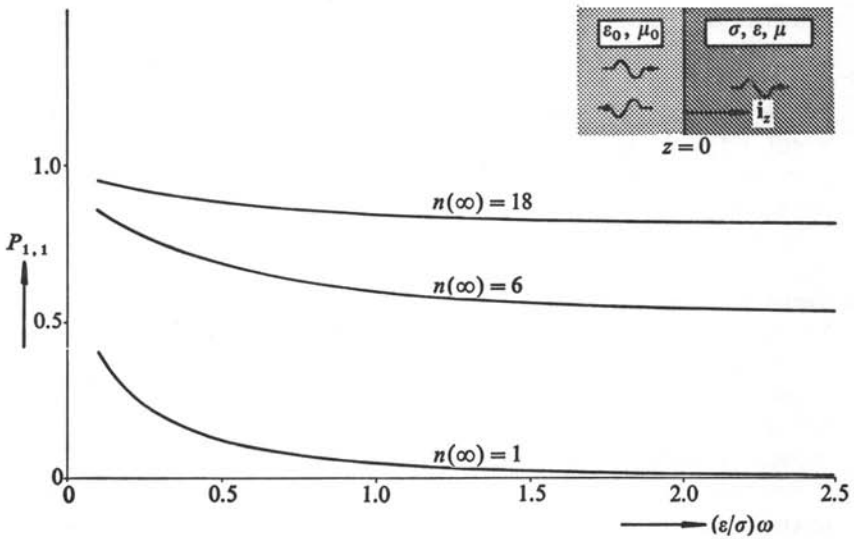


Fig. 42. Reflectantie van een materiaal waarvoor σ, ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn, als functie van $(\varepsilon/\sigma)\omega$, met $n(\infty) = (\varepsilon_r \mu_r)^{\frac{1}{2}}$ als parameter.

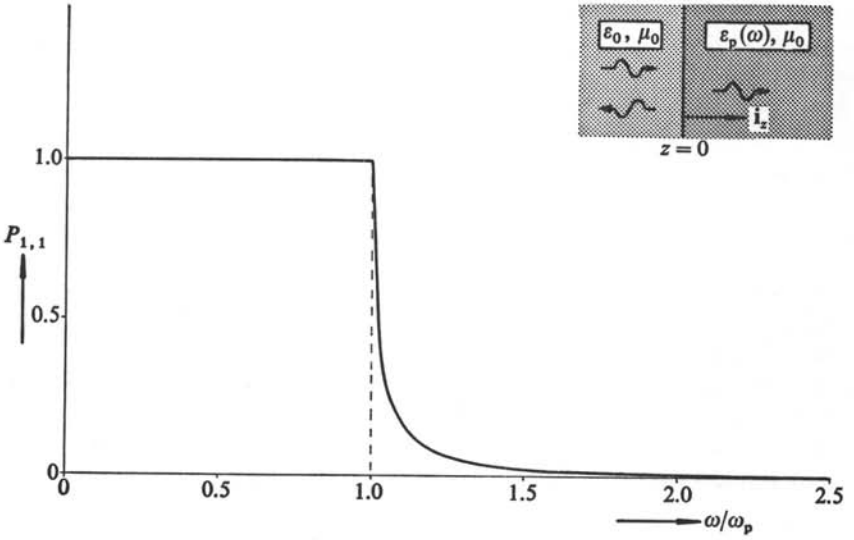


Fig. 43. Reflectantie van een botsingsvrij plasma als functie van ω/ω_p (ω_p = plasmacirkelfrequentie).

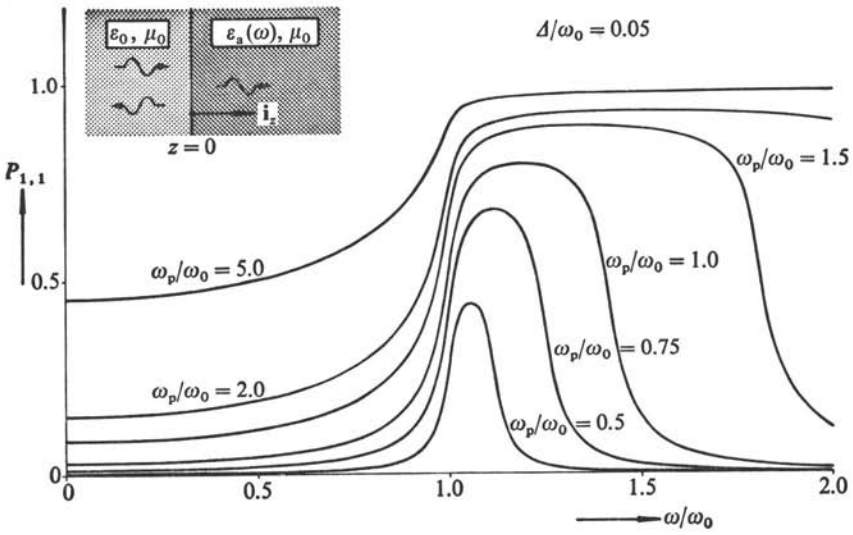


Fig. 44. Reflectantie van een diëlektrisch materiaal met een absorptielijn als functie van ω/ω_0 (ω_0 = centrale frequentie van de absorptielijn), met ω_p/ω_0 en Δ/ω_0 als parameter (ω_p = plasmacirkelfrequentie en Δ = lijnbreedte van de absorptielijn).

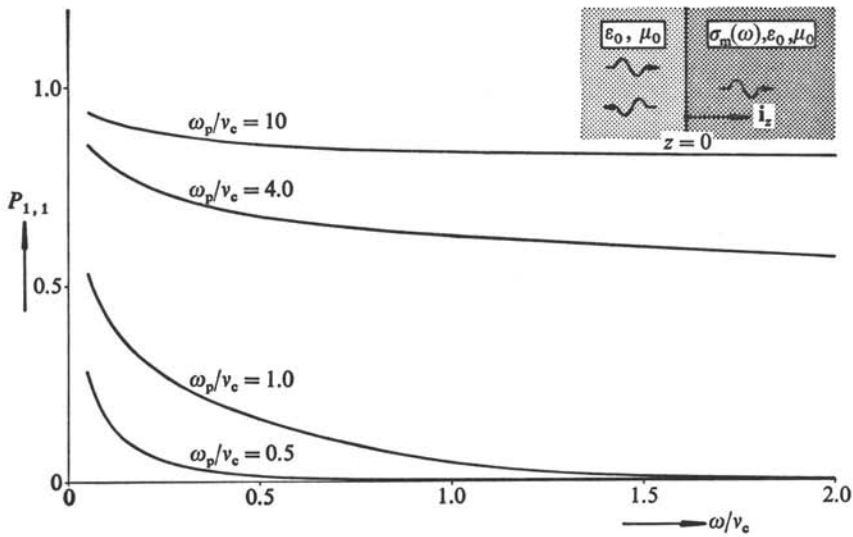


Fig. 45. Reflectantie van een metaal als functie van ω/ν_c (ν_c = botsingsfrequentie voor de impulsoverdracht van de geleidingselektronen aan het atoomrooster), met ω_p/ν_c als parameter (ω_p = plasmacirkelfrequentie van de geleidingselektronen).

Hieruit kunnen dan weer bepaalde conclusies worden getrokken ten aanzien van de microscopische structuur van dat materiaal. Voor een verdergaande bespreking van zowel de experimentele als de theoretische methoden die hierbij worden toegepast, verwijzen wij naar de literatuur (BORN and WOLF[26] en AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook*[27]).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 23.1. Onderstel, dat in de in Fig. 41 weergegeven configuratie Medium 2 elektrisch ondoordringbaar is. Bepaal de reflectiefactoren $\rho^E_{1,2}$ en $\rho^H_{1,2}$ door (a) de randvoorwaarden $\lim_{z\uparrow 0} E_{x,1} = 0$ en $\lim_{z\uparrow 0} E_{y,1} = 0$ te gebruiken, (b) van de uitdrukkingen (23.36) voor $\rho^E_{1,2}$ en (23.58) voor $\rho^H_{1,2}$ de limiet voor $\sigma_2 \to \infty$ te bepalen.
Antwoord: $\rho^E_{1,2} = -1$, $\rho^H_{1,2} = 1$. (Voor de bepaling van de onder (b) gevraagde limieten wordt gebruik gemaakt van $Y_2 \to \infty$ en $Z_2 \to 0$, voor $\sigma_2 \to \infty$.)

Vraagstuk 23.2. Onderstel, dat in de in Fig. 41 weergegeven configuratie voor Medium 1 geldt $\sigma_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_0$ en voor Medium 2 desgelijks $\sigma_2 = 0$, $\mu_2 = \mu_0$. Bewijs, dat in dit geval geldt $\rho^E_{1,2} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ en $\rho^H_{1,2} = (n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$, waarin $n_1 = (\varepsilon_{r,1})^{\frac{1}{2}}$ en $n_2 = (\varepsilon_{r,2})^{\frac{1}{2}}$ en bepaal de reflectantie.
Antwoord:

$$P_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2 = |\rho^H_{1,2}|^2 = \frac{(n'_1 - n'_2)^2 + (n''_1 - n''_2)^2}{(n'_1 + n'_2)^2 + (n''_1 + n''_2)^2}.$$

(Merk op, dat $P_{1,1} = (n_1 - n_2)^2/(n_1 + n_2)^2$ voor het geval, dat voor beide media de brekingsindices reëel zijn.)

Vraagstuk 23.3. Onderstel, dat in de in Fig. 41 weergegeven configuratie voor Medium 1 geldt $\sigma_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_0$, terwijl ε_1 reëel en positief is; voor Medium 2 geldt $\sigma_2 = 0$, $\mu_2 = \mu_0$, terwijl ε_2 complex is. Bewijs, dat in dit geval de reflectantie wordt gegeven door

$$P_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2 = |\rho^H_{1,2}|^2 = \frac{(n_1 - n'_2)^2 + (n''_2)^2}{(n_1 + n'_2)^2 + (n''_2)^2},$$

waarin $n_1 = (\varepsilon_{r,1})^{\frac{1}{2}}$ en $n_2 = (\varepsilon_{r,2})^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 23.4. Bepaal voor de in Vraagstuk 23.2 beschreven configuratie de transmittantie $P_{2,1} = P^E_{2,1} = P^H_{2,1}$.
Antwoord:

$$P_{2,1} = \frac{n'_2}{n'_1} \frac{4[(n'_1)^2 + (n''_1)^2]}{(n'_1 + n'_2)^2 + (n''_1 + n''_2)^2}.$$

(Merk op, dat $P_{2,1} = 4n_1 n_2/(n_1 + n_2)^2$ in het geval, dat voor beide media de brekingsindices reëel zijn. In dit laatste geval geldt tevens $P_{1,1} + P_{2,1} = 1$.)

26. BORN, M. and E. WOLF, *Principles of optics*, 4th. ed., Oxford, Pergamon Press, 1970, Chapter 13.
27. AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS *handbook*, 3rd. ed., New York, McGraw-Hill Book Company, 1972, Section 6.

Vraagstuk 23.5. Onderstel, dat in de in Fig. 41 weergegeven configuratie Medium 1 vacuüm is en Medium 2 een botsingsvrij plasma met plasmacirkelfrequentie ω_p. Bepaal voor dit geval (a) de reflectiefactoren $\rho^E_{1,2}$ en $\rho^H_{1,2}$, (b) de reflectantie $P_{1,1} = |\rho^E_{1,2}|^2 = |\rho^H_{1,2}|^2$, (c) de transmittantie $P_{2,1} = P^E_{2,1} = P^H_{2,1}$.
Antwoord: (a) $\rho^E_{1,2} = (1-n_2)/(1+n_2)$ en $\rho^H_{1,2} = (n_2-1)/(n_2+1)$, met $n_2 = -j(\omega_p^2/\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ voor $0 < \omega < \omega_p$ en $n_2 = (1-\omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}$ voor $\omega_p < \omega < \infty$; (b) $P_{1,1} = 1$ voor $0 < \omega < \omega_p$ en $P_{1,1} = [1-(1-\omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^2/[1+(1-\omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^2$ voor $\omega_p < \omega < \infty$; (c) $P_{2,1} = 0$ voor $0 < \omega < \omega_p$ en $P_{2,1} = 4(1-\omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}/[1+(1-\omega_p^2/\omega^2)^{\frac{1}{2}}]^2$ voor $\omega_p < \omega < \infty$. (Het verschijnsel, dat een botsingsvrij plasma in het frequentiegebied $0 < \omega < \omega_p$ de erop invallende elektromagnetische energie reflecteert ($P_{1,1} = 1$) en geen elektromagnetische energie doorlaat ($P_{2,1} = 0$), is o.a. verantwoordelijk voor de reflectie van radiogolven tegen de ionosfeer, waardoor propagatie van radiogolven over grote afstanden mogelijk wordt, en voor de afschermende werking van het door ionisatie ontstane plasmaschild rondom een in de atmosfeer terugkerend ruimtevoertuig, waardoor radiocommunicatie tussen de aarde en dit voertuig wordt verhinderd.)

24. Overdrachtseigenschappen van een gelaagd medium (eendimensionale elektromagnetische golven)

In deze paragraaf bestuderen wij de overdrachtseigenschappen van een medium dat uit een eindig aantal vlakke, aan elkaar grenzende lagen met verschillende elektromagnetische eigenschappen is opgebouwd. In de optica wordt een dergelijke configuratie als *interferentiefilter* aangeduid. Daarnaast zijn vele in de geofysica onderzochte configuraties gelaagd (aarde, atmosfeer). Ondersteld wordt, dat in de configuratie eendimensionale elektromagnetische golven aanwezig zijn. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; als complexe tijdfactor gebruiken wij $\exp(j\omega t)$. Om de plaats in de ruimte vast te leggen, gebruiken wij een

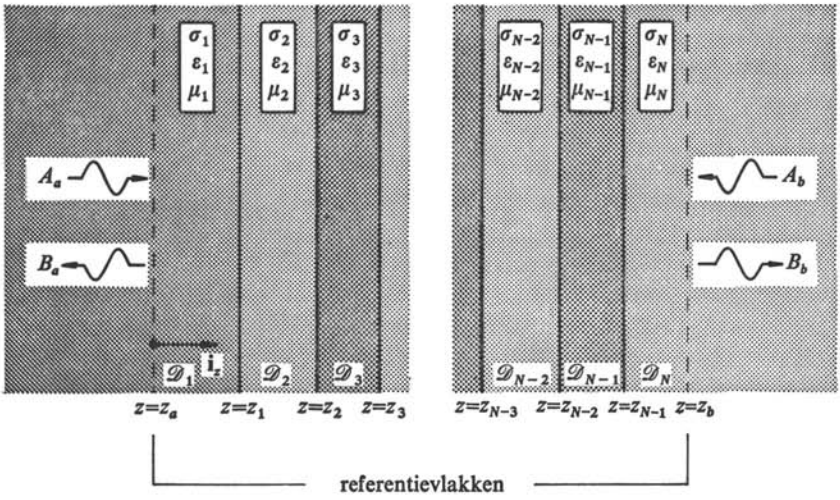


Fig. 46. Configuratie bestaande uit een eindig aantal vlakke, aan elkaar grenzende lagen met verschillende elektromagnetische eigenschappen.

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan de z-as loodrecht op de onderling evenwijdige scheidingsvlakken van de lagen staat (Fig. 46). Laat de configuratie uit $N-2$ lagen van eindige dikte bestaan; de twee buitenste lagen grenzen aan één zijde aan een halfruimte. De configuratie bestaat dan uit N aan elkaar grenzende gebieden. De $N-1$ scheidingsvlakken tussen de opeenvolgende gebieden duiden wij aan met $z = z_p$ $(p = 1, \ldots, N-1)$, waarbij $z_1 < \ldots < z_{N-1}$. Het gebied waarvoor $z_{p-1} < z < z_p$ noemen wij $\mathscr{D}_p$ $(p = 2, \ldots, N-1)$; verder is $\mathscr{D}_1$ het gebied waarvoor $-\infty < z < z_1$ en $\mathscr{D}_N$ het gebied waarvoor $z_{N-1} < z < \infty$. Elk van de aanwezige media wordt lineair, homogeen en isotroop ondersteld, met constitutieve vergelijkingen van de gedaante (21.5) t/m (21.7). Wat de constitutieve coëfficiënten betreft, stellen wij

$$\sigma = \sigma_p, \qquad \varepsilon = \varepsilon_p, \qquad \mu = \mu_p \qquad \text{in } \mathscr{D}_p. \tag{24.1}$$

In de configuratie zijn — alleen van z afhankelijke — eendimensionale elektromagnetische golven aanwezig. In elk van de gebieden $\mathscr{D}_p$ kunnen wij deze splitsen in een golf in de positieve z-richting en een golf in de negatieve z-richting. De voortplantingscoëfficiënt van de golven in het gebied $\mathscr{D}_p$ is gegeven door

$$\gamma_p = [(\sigma_p + j\omega\varepsilon_p)\, j\omega\mu_p]^{\frac{1}{2}}, \tag{24.2}$$

hun golfadmittantie door

$$Y_p = \gamma_p / j\omega\mu_p \tag{24.3}$$

en hun golfimpedantie door

$$Z_p = \gamma_p / (\sigma_p + j\omega\varepsilon_p). \tag{24.4}$$

Koppeling tussen de golven vindt plaats via de randvoorwaarden bij doorgang door ieder scheidingsvlak. Hiervoor geldt (zie (18.21) en (18.22), met $\mathbf{v} = \mathbf{i}_z$)

$$\left.\begin{aligned} \lim_{z \uparrow z_p} E_{x,p} &= \lim_{z \downarrow z_p} E_{x,p+1} \\ \lim_{z \uparrow z_p} E_{y,p} &= \lim_{z \downarrow z_p} E_{y,p+1} \\ \lim_{z \uparrow z_p} H_{x,p} &= \lim_{z \downarrow z_p} H_{x,p+1} \\ \lim_{z \uparrow z_p} H_{y,p} &= \lim_{z \downarrow z_p} H_{y,p+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{voor } p = 1, \ldots, N-1. \tag{24.5}$$

Uit de in Par. 21 behandelde theorie is bekend, dat in een uniforme sectie van een medium geen koppeling optreedt tussen de lineair gepolariseerde deelvelden $\{E_x, H_y\}$ en $\{E_y, H_x\}$. Uit de in Par. 23 behandelde theorie is bekend, dat ook aan een scheidingsvlak tussen twee verschillende media zo'n koppeling — althans voor eendimensionale

golven — niet optreedt. Als gevolg hiervan treedt er in het gehele gelaagde medium geen koppeling op tussen de lineair gepolariseerde deelvelden $\{E_x, H_y\}$ en $\{E_y, H_x\}$. De berekeningen voor de beide deelvelden kunnen dus geheel gescheiden worden uitgevoerd. Voor beide deelvelden zijn de overdrachtsmatrices dezelfde, evenals de verstrooiingsmatrices. Wel worden — evenals in Par. 23 het geval was — de eigenschappen op basis van de elektrische veldsterkte door andere overdrachts- en verstrooiingsmatrices beschreven dan de eigenschappen op basis van de magnetische veldsterkte.

Voor de berekeningen maken wij wederom gebruik van de golfmatrix voor een bepaalde component van het elektromagnetische veld en stellen

$$[\Psi_p] = \begin{bmatrix} \Psi_p^-(z) \\ \Psi_p^+(z) \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathscr{D}_p \,. \tag{24.6}$$

De overdrachtsmatrix $[T_p(z_p - z_{p-1})]$ van de uniforme sectie $\mathscr{D}_p$ volgt dan uit de betrekking (zie (21.26))

$$\lim_{z \downarrow z_{p-1}} [\Psi_p(z)] = [T_p(z_p - z_{p-1})] \lim_{z \uparrow z_p} [\Psi_p(z)] \tag{24.7}$$

en de overdrachtsmatrix $[T_{p\to p+1}]$ van de overgang van $\mathscr{D}_p$ naar $\mathscr{D}_{p+1}$ uit de betrekking (zie (23.9))

$$\lim_{z \uparrow z_p} [\Psi_p(z)] = [T_{p\to p+1}] \lim_{z \downarrow z_p} [\Psi_{p+1}(z)]. \tag{24.8}$$

Verder voeren wij nog een referentievlak $z = z_a$ in het gebied $\mathscr{D}_1$ in en een referentievlak $z = z_b$ in het gebied $\mathscr{D}_N$. De overdrachtsmatrix van de in $\mathscr{D}_1$ gelegen uniforme sectie $z_a < z < z_1$ is dan $[T_1(z_1 - z_a)]$ en de overdrachtsmatrix van de in $\mathscr{D}_N$ gelegen uniforme sectie $z_{N-1} < z < z_b$ is $[T_N(z_b - z_{N-1})]$. Aangezien de overdrachtsmatrix van een tussen twee referentievlakken gelegen configuratie gelijk is aan het product van de overdrachtsmatrices van de aan elkaar grenzende, opeenvolgende onderdelen van de configuratie, verkrijgt men voor de overdrachtsmatrix $[T_{a\to b}]$ van de tussen de referentievlakken $z = z_a$ en $z = z_b$ gelegen configuratie de uitdrukking

$$\begin{aligned}[T_{a\to b}] = {} & [T_1(z_1 - z_a)]\,[T_{1\to 2}]\,[T_2(z_2 - z_1)] \cdots \\ & \cdots [T_{p-1\to p}]\,[T_p(z_p - z_{p-1})]\,[T_{p\to p+1}] \cdots \\ & \cdots [T_{N-1}(z_{N-1} - z_{N-2})]\,[T_{N-1\to N}]\,[T_N(z_b - z_{N-1})]\,. \end{aligned} \tag{24.9}$$

Voor de matrix $[T_{a\to b}]$, die wij schrijven als

$$[T_{a\to b}] = \begin{bmatrix} T^{-,-} & T^{-,+} \\ T^{+,-} & T^{+,+} \end{bmatrix}, \tag{24.10}$$

geldt de betrekking

$$[\Psi_1(z_a)] = [T_{a\to b}]\,[\Psi_N(z_b)]. \tag{24.11}$$

Voor de verstrooiingsmatrix $[S_{a\leftrightarrow b}]$ van de tussen de referentievlakken $z = z_a$ en $z = z_b$ gelegen configuratie is geen uitdrukking van de gedaante (24.9) te verkrijgen. Wel zijn de elementen van $[S_{a\leftrightarrow b}]$ te bepalen nadat $[T_{a\to b}]$ is berekend. Daartoe voeren wij de kolommatrix $[A]$ van de complexe amplitudes van de golven naar de configuratie toe en de kolommatrix $[B]$ van de complexe amplitudes van de golven van de configuratie af in, namelijk

$$[A] = \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1^+(z_a) \\ \Psi_N^-(z_b) \end{bmatrix} \tag{24.12}$$

en

$$[B] = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1^-(z_a) \\ \Psi_N^+(z_b) \end{bmatrix}. \tag{24.13}$$

De verstrooiingsmatrix $[S_{a\leftrightarrow b}]$, die wij schrijven als

$$[S_{a\leftrightarrow b}] = \begin{bmatrix} S_{a,a} & S_{a,b} \\ S_{b,a} & S_{b,b} \end{bmatrix}, \tag{24.14}$$

voldoet dan aan de betrekking

$$[B] = [S_{a\leftrightarrow b}]\,[A]. \tag{24.15}$$

Door (24.15) te vergelijken met (24.11) verkrijgen wij voor de elementen van $[S_{a\leftrightarrow b}]$ de volgende uitdrukkingen

$$S_{a,a} = T^{-,+}/T^{+,+}, \tag{24.16}$$

$$S_{a,b} = (T^{-,-}T^{+,+} - T^{-,+}T^{+,-})/T^{+,+}, \tag{24.17}$$

$$S_{b,a} = 1/T^{+,+}, \tag{24.18}$$

$$S_{b,b} = -T^{+,-}/T^{+,+}. \tag{24.19}$$

Uit (21.27) volgt, dat voor elk tweetal in $\mathscr{D}_p$ gelegen referentievlakken geldt

$$[T_p(d_p)] = \begin{bmatrix} \exp(-\gamma_p d_p) & 0 \\ 0 & \exp(\gamma_p d_p) \end{bmatrix}, \tag{24.20}$$

waarin d_p de afstand is van het referentievlak aan de ingang van de p-de sectie tot het referentievlak aan de uitgang van deze sectie. Hiermee zijn

de in (24.9) voorkomende overdrachtsmatrices van uniforme secties te bepalen. Dit geldt zowel voor de analyse op basis van de elektrische veldsterkte als voor de analyse op basis van de magnetische veldsterkte. De in (24.9) voorkomende overdrachtsmatrices van de overgang van het ene medium naar het daaropvolgende zijn verschillend voor de analyse op basis van de elektrische veldsterkte en de analyse op basis van de magnetische veldsterkte. Deze worden hieronder besproken.

(a) *Analyse op basis van de elektrische veldsterkte*

Uit (23.38) volgt, dat de overdrachtsmatrix $[T^E_{p\to p+1}]$ van de overgang van het medium in $\mathscr{D}_p$ naar het medium in $\mathscr{D}_{p+1}$, betrokken op het scheidingsvlak $z=z_p$ als referentievlak, bij analyse op basis van de elektrische veldsterkte is gegeven door

$$[T^E_{p\to p+1}] = \frac{1}{1+\rho^E_{p,p+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho^E_{p,p+1} \\ \rho^E_{p,p+1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{24.21}$$

waarin

$$\rho^E_{p,p+1} = (Y_p - Y_{p+1})/(Y_p + Y_{p+1}). \tag{24.22}$$

Door de in (24.20) en (24.21) verkregen uitdrukkingen in (24.9) te substitueren en de matrixvermenigvuldigingen uit te voeren, is $[T^E_{a\to b}]$ te bepalen. Door daarna van (24.16) t/m (24.19) gebruik te maken, verkrijgt men $[S^E_{a\leftrightarrow b}]$.

(b) *Analyse op basis van de magnetische veldsterkte*

Uit (23.60) volgt, dat de overdrachtsmatrix $[T^H_{p\to p+1}]$ van de overgang van het medium in $\mathscr{D}_p$ naar het medium in $\mathscr{D}_{p+1}$, betrokken op het scheidingsvlak $z=z_p$ als referentievlak, bij analyse op basis van de magnetische veldsterkte is gegeven door

$$[T^H_{p\to p+1}] = \frac{1}{1+\rho^H_{p,p+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho^H_{p,p+1} \\ \rho^H_{p,p+1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{24.23}$$

waarin

$$\rho^H_{p,p+1} = (Z_p - Z_{p+1})/(Z_p + Z_{p+1}). \tag{24.24}$$

Door de in (24.20) en (24.23) verkregen uitdrukkingen in (24.9) te substitueren en de matrixvermenigvuldigingen uit te voeren, is $[T^H_{a\to b}]$ te bepalen. Door daarna van (24.16) t/m (24.19) gebruik te maken, verkrijgt men $[S^H_{a\leftrightarrow b}]$.

Als toepassing van de hierboven gegeven algemene theorie beschouwen wij thans het geval $N=3$ (Fig. 47). Verder kiezen wij de grensvlakken

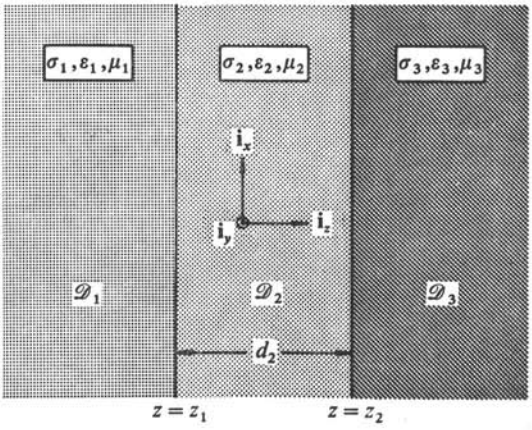


Fig. 47. Configuratie van Fig. 46 voor $N=3$, $z_a \uparrow z_1$ en $z_b \downarrow z_2$.

van de aanwezige laag als referentievlakken, d.w.z. $z_a \uparrow z_1$ en $z_b \downarrow z_2$, en stellen

$$z_2 - z_1 = d_2 . \tag{24.25}$$

Hiermee wordt (zie (24.20))

$$[T_2(z_2-z_1)] = \begin{bmatrix} \exp(-\gamma_2 d_2) & 0 \\ 0 & \exp(\gamma_2 d_2) \end{bmatrix}, \tag{24.26}$$

terwijl (zie (24.21) en (24.23))

$$[T_{1\to 2}] = \frac{1}{1+\rho_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} \\ \rho_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \tag{24.27}$$

en

$$[T_{2\to 3}] = \frac{1}{1+\rho_{2,3}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{2,3} & 1 \end{bmatrix}. \tag{24.28}$$

Substitutie van (24.26) t/m (24.28) in (24.9) en uitvoeren van de matrixvermenigvuldigingen leidt tot de overdrachtsmatrix

$$[T_{a\to b}] = \begin{bmatrix} T^{-,-} & T^{-,+} \\ T^{+,-} & T^{+,+} \end{bmatrix}, \tag{24.29}$$

waarvan de elementen zijn gegeven door

$$T^{-,-} = \frac{\exp(-\gamma_2 d_2) + \rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(\gamma_2 d_2)}{(1+\rho_{1,2})(1+\rho_{2,3})}, \tag{24.30}$$

$$T^{-,+} = \frac{\rho_{2,3}\exp(-\gamma_2 d_2) + \rho_{1,2}\exp(\gamma_2 d_2)}{(1+\rho_{1,2})(1+\rho_{2,3})}, \tag{24.31}$$

$$T^{+,-} = \frac{\rho_{1,2}\exp(-\gamma_2 d_2) + \rho_{2,3}\exp(\gamma_2 d_2)}{(1+\rho_{1,2})(1+\rho_{2,3})}, \tag{24.32}$$

$$T^{+,+} = \frac{\rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(-\gamma_2 d_2) + \exp(\gamma_2 d_2)}{(1+\rho_{1,2})(1+\rho_{2,3})}. \tag{24.33}$$

Voor de elementen van de verstrooiingsmatrix

$$[S_{a\leftrightarrow b}] = \begin{bmatrix} S_{a,a} & S_{a,b} \\ S_{b,a} & S_{b,b} \end{bmatrix} \tag{24.34}$$

verkrijgt men met behulp van (24.16) t/m (24.19)

$$S_{a,a} = \frac{\rho_{1,2}+\rho_{2,3}\exp(-2\gamma_2 d_2)}{1+\rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(-2\gamma_2 d_2)}, \tag{24.35}$$

$$S_{a,b} = \frac{(1-\rho_{1,2})(1-\rho_{2,3})\exp(-\gamma_2 d_2)}{1+\rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(-2\gamma_2 d_2)}, \tag{24.36}$$

$$S_{b,a} = \frac{(1+\rho_{1,2})(1+\rho_{2,3})\exp(-\gamma_2 d_2)}{1+\rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(-2\gamma_2 d_2)}, \tag{24.37}$$

$$S_{b,b} = -\frac{\rho_{2,3}+\rho_{1,2}\exp(-2\gamma_2 d_2)}{1+\rho_{1,2}\rho_{2,3}\exp(-2\gamma_2 d_2)}. \tag{24.38}$$

In het bijzonder onderzoeken wij de reflectie- en transmissie-eigenschappen van de configuratie voor het geval, dat alle drie de media een soortelijke geleiding gelijk aan nul hebben, terwijl hun permittiviteiten en permeabiliteiten reëel en positief zijn. In dit geval zijn Y_1, Y_2 en Y_3 (en dus ook Z_1, Z_2 en Z_3) reëel en geldt

$$\gamma_1 = j\beta_1, \qquad \gamma_2 = j\beta_2, \qquad \gamma_3 = j\beta_3, \tag{24.39}$$

waarin β_1, β_2 en β_3 reëel zijn. De reflectie- en transmissie-eigenschappen van de configuratie worden weerspiegeld in de vermogensverstrooiings-

matrix, die wij schrijven als

$$[P_{a\leftrightarrow b}] = \begin{bmatrix} P_{a,a} & P_{a,b} \\ P_{b,a} & P_{b,b} \end{bmatrix}. \tag{24.40}$$

In de gebruikelijke notatie verkrijgen wij voor de reflectanties

$$P^E_{a,a} = |S^E_{a,a}|^2, \qquad P^H_{a,a} = |S^H_{a,a}|^2, \tag{24.41}$$

$$P^E_{b,b} = |S^E_{b,b}|^2, \qquad P^H_{b,b} = |S^H_{b,b}|^2 \tag{24.42}$$

en voor de transmittanties

$$P^E_{a,b} = (Y_1/Y_3)\,|S^E_{a,b}|^2, \qquad P^H_{a,b} = (Z_1/Z_3)\,|S^H_{a,b}|^2, \tag{24.43}$$

$$P^E_{b,a} = (Y_3/Y_1)\,|S^E_{b,a}|^2, \qquad P^H_{b,a} = (Z_3/Z_1)\,|S^H_{b,a}|^2. \tag{24.44}$$

Substitutie van (24.22) en (24.24) in (24.35) t/m (24.38) leidt tot de betrekkingen

$$\begin{cases} P^E_{a,a} = P^H_{a,a}, & P^E_{a,b} = P^H_{a,b}, \\ P^E_{b,a} = P^H_{b,a}, & P^E_{b,b} = P^H_{b,b}, \end{cases} \tag{24.45}$$

zodat wij de opschriften ‚E' en ‚H' bij de reflectanties en de transmittanties kunnen weglaten. Verder blijkt, dat

$$P_{a,a} = P_{b,b} \qquad \text{en} \qquad P_{a,b} = P_{b,a}, \tag{24.46}$$

terwijl

$$P_{a,a} + P_{a,b} = P_{b,a} + P_{b,b} = 1. \tag{24.47}$$

Uitwerken van de resultaten geeft

$$P_{a,a} = P_{b,b} = \frac{\rho^2_{1,2} + 2\rho_{1,2}\rho_{2,3}\cos(2\beta_2 d_2) + \rho^2_{2,3}}{1 + 2\rho_{1,2}\rho_{2,3}\cos(2\beta_2 d_2) + \rho^2_{1,2}\rho^2_{2,3}}$$

$$= 1 - \frac{(1-\rho^2_{1,2})(1-\rho^2_{2,3})}{1 + 2\rho_{1,2}\rho_{2,3}\cos(2\beta_2 d_2) + \rho^2_{1,2}\rho^2_{2,3}} \tag{24.48}$$

en

$$P_{a,b} = P_{b,a} = \frac{(1-\rho^2_{1,2})(1-\rho^2_{2,3})}{1 + 2\rho_{1,2}\rho_{2,3}\cos(2\beta_2 d_2) + \rho^2_{1,2}\rho^2_{2,3}}. \tag{24.49}$$

Voor de interpretatie van de resultaten maken wij onderscheid tussen het geval, dat $\rho_{1,2}$ en $\rho_{2,3}$ hetzelfde teken hebben en het geval, dat $\rho_{1,2}$ en $\rho_{2,3}$ verschillend teken hebben.

Geval 1: $\mathrm{sgn}(\rho_{1,2}) = \mathrm{sgn}(\rho_{2,3})$. Dan is $\rho_{1,2}\rho_{2,3} > 0$ en heeft $P_{a,a}$ een maximum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = 1$ en een minimum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = -1$. Evenzo heeft $P_{a,b}$ een minimum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = 1$ en een maximum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = -1$. De extreme waarden van $P_{a,a}$ en $P_{a,b}$ zijn aangegeven in Tabel 10. Uit de aangegeven waarden voor het

Tabel 10. Extreme waarden van de reflectantie en de transmittantie voor het geval $\rho_{1,2}\rho_{2,3} > 0$ $(N = 3)$

	reflectantie $P_{a,a}$	transmittantie $P_{a,b}$
$\cos(2\beta_2 d_2) = 1$, $2\beta_2 d_2 = 2m\pi$, of $d_2 = m\lambda_2/2$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$	$\dfrac{(\rho_{1,2}+\rho_{2,3})^2}{(1+\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (maximum)	$1 - \dfrac{(\rho_{1,2}+\rho_{2,3})^2}{(1+\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (minimum)
$\cos(2\beta_2 d_2) = -1$, $2\beta_2 d_2 = (2m+1)\pi$, of $d_2 = (2m+1)\lambda_2/4$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{(\rho_{1,2}-\rho_{2,3})^2}{(1-\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (minimum)	$1 - \dfrac{(\rho_{1,2}-\rho_{2,3})^2}{(1-\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (maximum)

maximum van de reflectantie en het minimum van de transmittantie volgt na enige herleiding

$$\max(P_{a,a}) = \rho_{1,3}^2 \tag{24.50}$$

en

$$\min(P_{a,b}) = 1 - \rho_{1,3}^2, \tag{24.51}$$

waarin $\rho_{1,3}^2 = (\rho_{1,3}^E)^2 = (\rho_{1,3}^H)^2$, met

$$\rho_{1,3}^E = (Y_1 - Y_3)/(Y_1 + Y_3) \quad \text{en} \quad \rho_{1,3}^H = (Z_1 - Z_3)/(Z_1 + Z_3). \tag{24.52}$$

Vervolgens onderzoeken wij de voorwaarde waaronder het minimum van de reflectantie de waarde nul heeft en derhalve het maximum van de transmittantie de waarde één. Dit is het geval als

$$\rho_{1,2} - \rho_{2,3} = 0 \quad (\min(P_{a,a}) = 0,\ \max(P_{a,b}) = 1), \tag{24.53}$$

dat wil zeggen als

$$Y_2^2 = Y_1 Y_3 \quad \text{of} \quad Z_2^2 = Z_1 Z_3. \tag{24.54}$$

Uitgedrukt in de constitutieve coëfficiënten luidt deze voorwaarde

$$\varepsilon_2/\mu_2 = (\varepsilon_1\varepsilon_3/\mu_1\mu_3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{of} \quad \mu_2/\varepsilon_2 = (\mu_1\mu_3/\varepsilon_1\varepsilon_3)^{\frac{1}{2}}. \tag{24.55}$$

Deze mogelijkheid vindt toepassing bij het ontwerpen van een *anti-reflectiedeklaag* (Eng.: *anti-reflection coating*), die op een lens wordt aangebracht om de reflectie van licht dat vanuit de lucht invalt, te verminderen. Daarbij zijn Y_1 (of Z_1) en Y_3 (of Z_3) gegeven en dient het materiaal van de deklaag zodanig te worden gekozen, dat aan (24.53) is voldaan en de dikte ervan zodanig, dat de reflectantie de waarde nul heeft bij de gewenste frequentie. Indien aan (24.53) wordt voldaan, is de uitdrukking (24.48) voor de reflectantie te herleiden tot

$$P_{a,a} = \frac{\rho_{1,3}^2 \cos^2(\beta_2 d_2)}{1-\rho_{1,3}^2 \sin^2(\beta_2 d_2)} \qquad \text{als} \qquad \rho_{1,2} = \rho_{2,3} \tag{24.56}$$

en de uitdrukking (24.49) voor de transmittantie tot

$$P_{a,b} = \frac{1-\rho_{1,3}^2}{1-\rho_{1,3}^2 \sin^2(\beta_2 d_2)} \qquad \text{als} \qquad \rho_{1,2} = \rho_{2,3}. \tag{24.57}$$

In Fig. 48 is $P_{a,a}$ uit (24.56) weergegeven als functie van $\beta_2 d_2$, met $\rho_{1,3}^2$ als parameter; Fig. 49 is een overeenkomstige figuur voor $P_{a,b}$ uit (24.57).

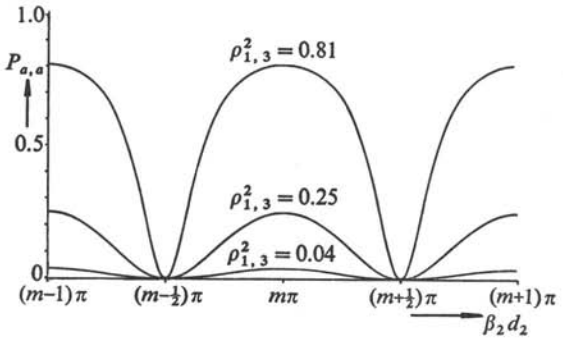


Fig. 48. Reflectantie van een anti-reflectiedeklaag als functie van $\beta_2 d_2$, *met* $\rho_{1,3}^2$ *als parameter.*

Geval 2: $\operatorname{sgn}(\rho_{1,2}) = -\operatorname{sgn}(\rho_{2,3})$. Dan is $\rho_{1,2}\rho_{2,3} < 0$ en heeft $P_{a,a}$ een minimum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = 1$ en een maximum voor $\cos(2\beta_2 d_2)$

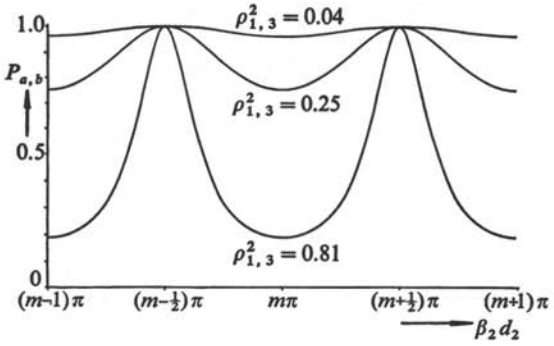


Fig. 49. Transmittantie van een anti-reflectiedeklaag als functie van $\beta_2 d_2$, *met* $\rho_{1,3}^2$ *als parameter.*

$= -1$. Evenzo heeft $P_{a,b}$ een maximum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = 1$ en een minimum voor $\cos(2\beta_2 d_2) = -1$. De extreme waarden van $P_{a,a}$ en $P_{a,b}$ zijn aangegeven in Tabel 11. Uit de aangegeven waarden voor het

Tabel 11. Extreme waarden van de reflectantie en de transmittantie voor het geval $\rho_{1,2}\rho_{2,3} < 0$ $(N = 3)$

	reflectantie $P_{a,a}$	transmittantie $P_{a,b}$
$\cos(2\beta_2 d_2) = 1$, $2\beta_2 d_2 = 2m\pi$, of $d_2 = m\lambda_2/2$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$	$\dfrac{(\rho_{1,2}+\rho_{2,3})^2}{(1+\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (minimum)	$1 - \dfrac{(\rho_{1,2}+\rho_{2,3})^2}{(1+\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (maximum)
$\cos(2\beta_2 d_2) = -1$, $2\beta_2 d_2 = (2m+1)\pi$, of $d_2 = (2m+1)\lambda_2/4$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{(\rho_{1,2}-\rho_{2,3})^2}{(1-\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (maximum)	$1 - \dfrac{(\rho_{1,2}-\rho_{2,3})^2}{(1-\rho_{1,2}\rho_{2,3})^2}$ (minimum)

minimum van de reflectantie en het maximum van de transmittantie volgt na enige herleiding

$$\min(P_{a,a}) = \rho_{1,3}^2 \tag{24.58}$$

en

$$\max(P_{a,b}) = 1 - \rho_{1,3}^2, \tag{24.59}$$

waarin $\rho_{1,3}^2 = (\rho_{1,3}^E)^2 = (\rho_{1,3}^H)^2$ uit (24.52) volgt. Vervolgens onderzoeken wij de voorwaarde waaronder het minimum van de reflectantie de waarde nul heeft en derhalve het maximum van de transmittantie de waarde één. Dit is het geval als

$$\rho_{1,3} = 0 \quad \text{of} \quad \rho_{1,2} + \rho_{2,3} = 0 \quad (\min(P_{a,a}) = 0,\ \max(P_{a,b}) = 1), \tag{24.60}$$

dat wil zeggen als

$$Y_1 = Y_3 \quad \text{of} \quad Z_1 = Z_3 . \tag{24.61}$$

Uitgedrukt in de constitutieve coëfficiënten luidt deze voorwaarde

$$(\varepsilon_1/\mu_1)^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon_3/\mu_3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{of} \quad (\mu_1/\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} = (\mu_3/\varepsilon_3)^{\frac{1}{2}} . \tag{24.62}$$

Deze mogelijkheid vindt toepassing bij het gebruik van een FABRY-PEROT *etalon* en bij het ontwerpen van een *radome*. Een FABRY-PEROT etalon is een zeer nauwkeurig afgewerkte planparallelle plaat van (praktisch) verliesvrij diëlektrisch materiaal. Deze wordt in lucht opgesteld en dient om uit elektromagnetische straling die erop invalt, bepaalde frequenties (of golflengten) te selecteren. Voor die frequenties (of golflengten) waarvoor $\lambda_2 = 2d_2/m$ is de etalon volledig doorlatend, voor andere frequenties (of golflengten) treedt reflectie op. Hoe het verloop van de reflectantie en van de transmittantie als functie van de frequentie is, wordt hieronder besproken. Een radome is een koepel van kunststof die dient om een antenne-installatie (b.v. voor radar of voor satellietcommunicatie) tegen weersinvloeden te beschermen. Bij de centrale frequentie van de frequentieband waarin de antenne wordt gebruikt, wordt de radome volledig doorlatend gemaakt. De dikte volgt dan uit $d_2 = m\lambda_2/2$, waarbij m in verband met de altijd aanwezige verliezen in het materiaal waarvan de radome wordt vervaardigd, niet groter wordt gekozen dan met het oog op de mechanische sterkte van de radome noodzakelijk is.

Indien aan (24.60) wordt voldaan, is de uitdrukking (24.48) voor de reflectantie te herleiden tot

$$P_{a,a} = \frac{4\rho_{1,2}^2 \sin^2(\beta_2 d_2)}{(1-\rho_{1,2}^2)^2 + 4\rho_{1,2}^2 \sin^2(\beta_2 d_2)}$$
$$\text{als} \quad \rho_{1,2} + \rho_{2,3} = 0 \quad (\text{dus } \rho_{1,3} = 0) \tag{24.63}$$

en de uitdrukking (24.49) voor de transmittantie tot

$$P_{a,b} = \frac{1}{1 + [4\rho_{1,2}^2/(1-\rho_{1,2}^2)^2] \sin^2(\beta_2 d_2)}$$
$$\text{als} \quad \rho_{1,2} + \rho_{2,3} = 0 \quad (\text{dus } \rho_{1,3} = 0). \tag{24.64}$$

De in (24.63) en (24.64) voorkomende parameter

$$\frac{4\rho_{1,2}^2}{(1-\rho_{1,2}^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{Y_1}{Y_2} - \frac{Y_2}{Y_1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{Z_1}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1}\right)^2 \tag{24.65}$$

is een maat voor het elektromagnetische contrast van Medium 2 met zijn omgeving (waarvoor (24.61) geldt). Voor een FABRY-PEROT etalon moet deze parameter zo groot mogelijk zijn, omdat dan alleen nauwe frequentiebanden worden doorgelaten; in de praktijk komt dit neer op $Y_2 \gg Y_1$ (of $Z_2 \ll Z_1$). Voor een radome moet deze parameter zo klein mogelijk zijn, omdat het vaak gewenst is een brede frequentie-

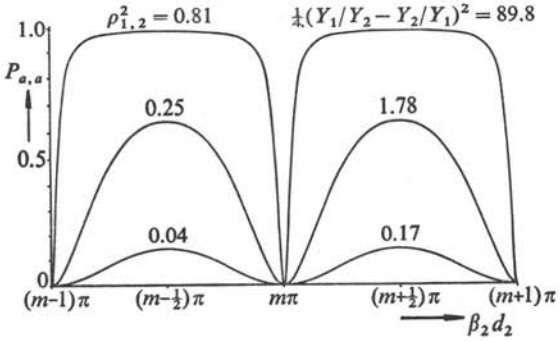


Fig. 50. Reflectantie van een FABRY-PEROT *etalon of een radome als functie van* $\beta_2 d_2$, *met* $\frac{1}{4}(Y_1/Y_2 - Y_2/Y_1)^2$ *als parameter.*

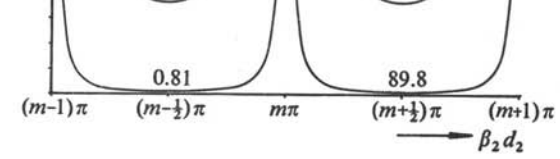


Fig. 51. Transmittantie van een FABRY-PEROT *etalon of een radome als functie van* $\beta_2 d_2$, *met* $\frac{1}{4}(Y_1/Y_2 - Y_2/Y_1)^2$ *als parameter.*

band door te laten; in de praktijk streeft men dan naar $Y_1 \simeq Y_2$ (of $Z_1 \simeq Z_2$). In Fig. 50 is $P_{a,a}$ uit (24.63) weergegeven als functie van $\beta_2 d_2$, met $\frac{1}{4}(Y_1/Y_2 - Y_2/Y_1)^2$ als parameter; Fig. 51 is een overeenkomstige figuur voor $P_{a,b}$ uit (24.64).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 24.1. Voor de in Fig. 47 weergegeven configuratie geldt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, terwijl ε_1, ε_2, ε_3 en μ_1, μ_2, μ_3 reëel en positief zijn. Medium 2 dient als anti-reflectiedeklaag, zodat aan Vergelijking (24.54) is voldaan. Bewijs, dat het maximum van de reflectantie is gegeven door $\max(P_{a,a}) = [(1 - Y_3/Y_1)/(1 + Y_3/Y_1)]^2 = [(1 - Z_3/Z_1)/(1 + Z_3/Z_1)]^2$.

Vraagstuk 24.2. Voor de in Fig. 47 weergegeven configuratie geldt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ en $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, terwijl ε_1, ε_2 en ε_3 reëel en positief zijn. De drie aanwezige media zijn dus verliesvrije diëlektrica en voor de brekingsindex geldt $n_p = (\varepsilon_{r,p})^{\frac{1}{2}}$ voor $p = 1, 2, 3$. Medium 2 dient als anti-reflectiedeklaag, zodat aan Vergelijking (24.54) is voldaan. Bewijs, dat in dit geval $n_2 = (n_1 n_3)^{\frac{1}{2}}$ en dat dan het maximum van de reflectantie is gegeven door $\max(P_{a,a}) = [(1 - n_3/n_1)/(1 + n_3/n_1)]^2$.

Vraagstuk 24.3. Controleer de getallen in onderstaande tabel, die van toepassing is op de in Vraagstuk 24.2 beschreven anti-reflectiedeklaag.

Tabel bij Vraagstuk 24.3. Anti-reflectiedeklaag (verliesvrije diëlektrica)

$\varepsilon_3/\varepsilon_1$	n_3/n_1	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	n_2/n_1	*maximale reflectantie*
81	9	9	3.000	0.640
64	8	8	2.828	0.605
49	7	7	2.646	0.563
36	6	6	2.449	0.510
25	5	5	2.236	0.444
16	4	4	2.000	0.360
9	3	3	1.732	0.250
4	2	2	1.414	0.111
2.25	1.5	1.5	1.225	0.040
1.21	1.1	1.1	1.049	0.002

minimale reflectantie = 0

Vraagstuk 24.4. Voor de in Fig. 47 weergegeven configuratie geldt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, terwijl ε_1, ε_2, ε_3 en μ_1, μ_2, μ_3 reëel en positief zijn. Medium 1 heeft dezelfde elektro-

magnetische eigenschappen als Medium 3; Medium 2 dient als FABRY-PEROT etalon of als radome (aan Vergelijking (24.61) is voldaan). Bewijs, dat het minimum van de transmittantie is gegeven door $\min(P_{a,b}) = 4/(Y_1/Y_2 + Y_2/Y_1)^2 = 4/(Z_1/Z_2 + Z_2/Z_1)^2$.

Vraagstuk 24.5. Voor de in Fig. 47 weergegeven configuratie geldt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ en $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$, terwijl ε_1, ε_2 en ε_3 reëel en positief zijn. De drie aanwezige media zijn dus verliesvrije diëlektrica en voor de brekingsindex geldt $n_p = (\varepsilon_{r,p})^{\frac{1}{2}}$ voor $p = 1, 2, 3$. Verder heeft Medium 1 dezelfde elektromagnetische eigenschappen als Medium 3; Medium 2 dient als FABRY-PEROT etalon of als radome (aan Vergelijking (24.61) is voldaan). Bewijs, dat in dit geval het minimum van de transmittantie is gegeven door $\min(P_{a,b}) = 4/(n_1/n_2 + n_2/n_1)^2 = 4(n_2/n_1)^2/[1 + (n_2/n_1)^2]^2$.

Vraagstuk 24.6. Controleer de getallen in onderstaande tabel, die van toepassing is op de in Vraagstuk 24.5 beschreven FABRY-PEROT etalon of radome.

Tabel bij Vraagstuk 24.6. FABRY-PEROT *etalon of radome (verliesvrije diëlektrica)*

$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	n_2/n_1	*minimale transmittantie*
81	9	0.048
64	8	0.061
49	7	0.078
36	6	0.105
25	5	0.148
16	4	0.221
9	3	0.360
4	2	0.640
2.25	1.5	0.852
1.21	1.1	0.991

maximale transmittantie = 1

Vraagstuk 24.7. (a) Bij welke dikten, uitgedrukt in de golflengte λ_0 in vacuüm, is de in Vraagstuk 24.2 beschreven anti-reflectiedeklaag reflectievrij? (b) Wat is de minimale dikte van de deklaag als $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_3 = 2.25\varepsilon_0$ en $\lambda_0 = 0.6\,\mu\text{m}$?

Antwoord: (a) $d_2 = (2m+1)\lambda_0/4(n_1 n_3)^{\frac{1}{2}}$ met $m = 0, 1, 2, \ldots$; (b) $d_2 = 0.122\,\mu\text{m}$.

Vraagstuk 24.8. (a) Bij welke dikten, uitgedrukt in de golflengte λ_0 in vacuüm, is de in Vraagstuk 24.5 beschreven radome reflectievrij? (b) Wat is de minimale dikte van de radome als $\varepsilon_2 = 2.25\varepsilon_0$ en $\lambda_0 = 3$ cm?

Antwoord: (a) $d_2 = m\lambda_0/2\varepsilon_{r,2}^{\frac{1}{2}}$ met $m = 1, 2, 3, \ldots$; (b) $d_2 = 1$ cm.

Vraagstuk 24.9. In de configuratie die in Fig. 47 is weergegeven, is Medium 3 elektrisch ondoordringbaar. Neem in Medium 1 een referentievlak $z = z_a$ en in Medium 2 een

referentievlak $z = z_b$. (a) Bepaal de overdrachtsmatrices $[T^E_{a\to b}]$ en $[T^H_{a\to b}]$ voor $z_a \uparrow z_1$ en $z_b \uparrow z_2$. (b) Hoe luiden de randvoorwaarden voor $z \uparrow z_2$, uitgedrukt in de elementen van de golfmatrix $[\Psi_2]$, als $\Psi_2 = E_{x,2}$ of $\Psi_2 = E_{y,2}$, respectievelijk als $\Psi_2 = H_{x,2}$ of $\Psi_2 = H_{y,2}$? (c) Bepaal de reflectiefactoren $S^E_{a,a}$ en $S^H_{a,a}$ door de onder (b) opgestelde randvoorwaarden in het onder (a) verkregen resultaat te substitueren. (d) Bewijs, dat $|S^E_{a,a}| = 1$ en $|S^H_{a,a}| = 1$ in het geval, dat $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, terwijl ε_1, ε_2 en μ_1, μ_2 reëel en positief zijn. (Let op, dat de Vergelijkingen (24.16) t/m (24.19) niet van toepassing zijn, omdat bij $z = z_b$ nu randvoorwaarden worden opgelegd.)
Antwoord: (a)

$$[T^{E,H}_{a\to b}] = \frac{1}{1+\rho^{E,H}_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho^{E,H}_{1,2} \\ \rho^{E,H}_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-\gamma_2 d_2) & 0 \\ 0 & \exp(\gamma_2 d_2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+\rho^{E,H}_{1,2}} \begin{bmatrix} \exp(-\gamma_2 d_2) & \rho^{E,H}_{1,2} \exp(\gamma_2 d_2) \\ \rho^{E,H}_{1,2} \exp(-\gamma_2 d_2) & \exp(\gamma_2 d_2) \end{bmatrix};$$

(b) $\lim_{z\uparrow z_2} \Psi_2^-(z) = -\lim_{z\uparrow z_2} \Psi_2^+(z)$ als $\Psi_2 = E_{x,2}$ of $\Psi_2 = E_{y,2}$ en $\lim_{z\uparrow z_2} \Psi_2^-(z) = \lim_{z\uparrow z_2} \Psi_2^+(z)$ als $\Psi_2 = H_{x,2}$ of $\Psi_2 = H_{y,2}$;

(c) $$S^E_{a,a} = \frac{-\exp(-\gamma_2 d_2) + \rho^E_{1,2} \exp(\gamma_2 d_2)}{-\rho^E_{1,2} \exp(-\gamma_2 d_2) + \exp(\gamma_2 d_2)},$$

$$S^H_{a,a} = \frac{\exp(-\gamma_2 d_2) + \rho^H_{1,2} \exp(\gamma_2 d_2)}{\rho^H_{1,2} \exp(-\gamma_2 d_2) + \exp(\gamma_2 d_2)};$$

(d) in dit geval is $\gamma_2 = j\beta_2$, met β_2 reëel en positief en zijn $\rho^E_{1,2}$ en $\rho^H_{1,2}$ reëel, zodat teller en noemer in de uitdrukkingen voor $S^E_{a,a}$ en $S^H_{a,a}$ elkaars toegevoegd complexe zijn.

25. Vrije elektromagnetische trillingen in een resonator (eendimensionale velden)

In deze paragraaf bestuderen wij de eigenschappen van de vrije elektromagnetische trillingen die kunnen optreden in een resonator. Een *resonator* of *trilholte* is een configuratie die wordt gebruikt om elektromagnetische veldenergie in een bepaald gebied in de ruimte te concentreren. De resonator vervult daarmee dezelfde functie — en als regel bij hoge frequenties — als de uit geconcentreerde netwerkelementen opgebouwde elektrische trillingskring bij lage frequenties. Om het gewenste effect van concentratie van energie inderdaad te bereiken, is het noodzakelijk de uitwisseling van elektromagnetische energie tussen de resonator en zijn omgeving beperkt te houden. Daar deze uitwisseling van energie plaatsvindt via de wand van de resonator, dient deze dan zodanig te worden geconstrueerd, dat er weinig energie doorheen kan worden getransporteerd. Dit laatste bereikt men òf door de wand in zijn geheel slechts weinig doorlatend te maken òf door in een elektromagnetisch ondoordringbare wand een zogenaamd koppelvenster van geringe afmetingen aan te brengen. Als voorbeeld van de eerste constructie noemen wij de FABRY-PEROT resonator. Deze wordt in laserconfiguraties

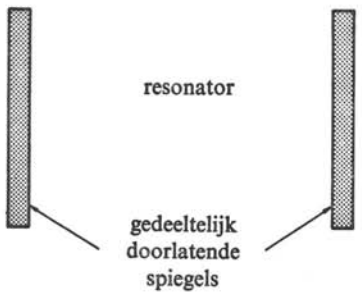


Fig. 52. FABRY-PEROT *resonator, bestaande uit twee onderling evenwijdige, goed reflecterende, vlakke spiegels.*

gebruikt en bestaat uit twee, onderling evenwijdige, goed reflecterende, vlakke spiegels (Fig. 52). De tweede constructie wordt toegepast bij de trilholten die in de microgolftechniek worden gebruikt; hun wand bestaat uit elektrisch zeer goed geleidend metaal en in de wand is een koppelvenster aangebracht (Fig. 53). De resonator kan nooit geheel van zijn

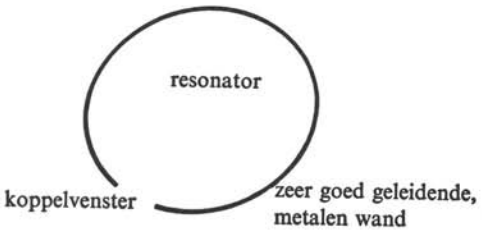


Fig. 53. Microgolftrilholte met koppelvenster in een elektrisch zeer goed geleidende, metalen wand.

omgeving worden afgesloten, omdat hij toegankelijk moet blijven voor uitwisseling van elektromagnetische energie met het systeem waarin hij is opgenomen; de resonator blijft dus altijd „open". Nu is het zo, dat de wiskundige theorie van de elektromagnetische trillingen in een volledig afgesloten of „gesloten" resonator aanzienlijk eenvoudiger is dan de theorie van deze trillingen in de werkelijke, open resonator. Vanwege de gecompliceerdheid van de laatste theorie is het gebruikelijk de open resonator als een „verstoring" van de gesloten resonator te beschouwen en de eigenschappen van de open resonator via een „storingsrekening" uit de eigenschappen van de overeenkomstige gesloten resonator af te leiden. Voor de behandeling van deze methode, die buiten ons bestek valt, verwijzen wij naar de literatuur (VAN BLADEL[28] en SLATER[29]).

Zoals reeds is opgemerkt, is de resonator altijd opgenomen in een systeem. Zo wordt de in Fig. 52 aangegeven FABRY-PEROT resonator veel gebruikt in een laser. In de resonator is dan een elektromagnetisch actief medium aanwezig, dat de erin lopende golven versterkt. Door de

28. VAN BLADEL, J., *Electromagnetic fields*, New York, McGraw–Hill Book Company, 1964. Chapter 10.
29. SLATER, J. C., *Microwave electronics*, New York, Dover Publications, Inc., 1969. Chapter IV.

herhaalde reflectie tegen de spiegels en de herhaalde versterking tijdens de overtocht tussen de spiegels ontstaat dan uit het samenstel van resonator en actief medium een oscillator, die als laser bekend staat. Buiten de resonator komt er dan elektromagnetische energie in de vorm van straling beschikbaar doordat ten minste één van de spiegels niet volledig reflecterend wordt gemaakt. Evenzo wordt de in Fig. 53 aangegeven microgolftrilholte doorgaans aangesloten aan een golfpijp waarin transmissie van energie via elektromagnetische golven plaatsvindt. Via het koppelvenster is het veld van deze golven gekoppeld met het veld in de trilholte, die zodoende de transmissie-eigenschappen van de golfpijp beïnvloedt.

Via de in het systeem aanwezige velden worden in de resonator *gedwongen trillingen* opgewekt. Deze gedwongen trillingen kunnen alleen dan een aanzienlijke amplitude verkrijgen als hun frequentie en hun veldverdeling past bij één van de trillingswijzen die de resonator van nature al heeft, de zogenaamde *vrije trillingen*. Om de eigenschappen van een resonator te karakteriseren, is het derhalve voldoende om zijn vrije trillingen te kennen. Voor de FABRY-PEROT resonator betekent dit, dat het actieve medium niet in de configuratie aanwezig is, waardoor de zogenaamde passieve resonator ontstaat. Voor de microgolftrilholte betekent dit, dat wij hem los van de golfpijp beschouwen. De amplitude van de vrije trillingen zal in de loop van de tijd afnemen, omdat er uit de resonator, indien deze aan zichzelf wordt overgelaten, energie in de loop van de tijd weglekt. De vrije trillingen zijn derhalve *gedempt*.

Alvorens uitvoeriger op eendimensionale vrije trillingen in te gaan, zullen wij enkele algemene begrippen invoeren, die van toepassing zijn op vrije trillingen in een willekeurig gebied en met algemene plaatsafhankelijkheid. Daar de vrije trillingen optreden in een bronvrij gebied (Fig. 54), voldoen de elektromagnetische veldgrootheden aan de bron-

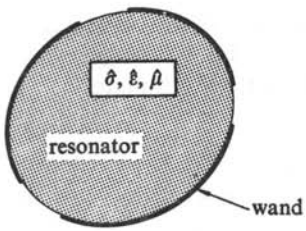


Fig. 54. Resonator.

vrije elektromagnetische veldvergelijkingen in het tijddomein

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}, \tag{25.1}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}. \tag{25.2}$$

In deze vergelijkingen scheiden wij de plaatsafhankelijkheid van de veldgrootheden van hun tijdafhankelijkheid via de volgende betrekkingen

$$\{\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{H}(\mathbf{r},t), \mathbf{J}(\mathbf{r},t), \mathbf{D}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\}$$
$$= \mathrm{Re}[\{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})\} \exp(\mathrm{j}\Omega t)], \tag{25.3}$$

waarin Ω een nog nader te bepalen complexe cirkelfrequentie voorstelt. Substitutie van (25.3) in (25.1) en (25.2) leidt tot

$$\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}} + \mathrm{j}\Omega\hat{\mathbf{D}}, \tag{25.4}$$

$$\mathbf{rot}\,\hat{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\Omega\hat{\mathbf{B}}. \tag{25.5}$$

De constitutieve vergelijkingen van het in de resonator aanwezige medium geven wij meteen in het frequentiedomein. Wij onderstellen, dat voor het beschouwde medium geldt

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\sigma}\hat{\mathbf{E}}, \tag{25.6}$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \hat{\varepsilon}\hat{\mathbf{E}}, \tag{25.7}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mu}\hat{\mathbf{H}}, \tag{25.8}$$

waarin $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ nog functies van de plaatscoördinaten en van Ω mogen zijn (zie de hieronder volgende *Opmerking*). Het medium is dus in ieder geval locaal reagerend, tijdinvariant, lineair en isotroop ondersteld. Tenslotte moeten op de wand van de resonator de veldgrootheden nog aan de randvoorwaarden voldoen.

Opmerking. De grootheden $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ ontstaan uit respectievelijk (19.10), (19.11) en (19.12), tezamen met (19.25), (19.26) en (19.27), door in het rechterlid ω door Ω te vervangen. Zoals op blz. 160 is aangetoond, zijn de resulterende integralen absoluut convergent in het gebied $\mathrm{Im}(\Omega) < 0$. Verderop zal echter blijken, dat de complexe resonantiecirkelfrequenties van de vrije trillingen van de resonator gelegen zijn in $\mathrm{Im}(\Omega) \geq 0$. Om de complexe resonantiecirkelfrequenties van de vrije trillingen te bepalen, moeten wij derhalve de uitdrukkingen voor $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ gebruiken buiten het gebied waar zij door (19.10), (19.11), respectievelijk (19.12) zijn gedefinieerd. Dit is mogelijk, dank zij het proces van analytische voortzetting dat bekend is uit de theorie van de functies van een complexe verander-

lijke. Deze methode wordt ook gevolgd bij de bepaling van de vrije trillingen in een elektrisch netwerk dat uit geconcentreerde elementen is opgebouwd. Daar uit de eindresultaten doorgaans direct blijkt, hoe eventuele singulariteiten in de analytische voortzettingen van $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ tot uitdrukking komen in de complexe resonantiecirkelfrequenties van de resonator, behoeft men niet — voorafgaand aan de verdere berekeningen — het aangeduide proces van analytisch voortzetten in detail te vervolgen.

In het algemeen voldoet bij willekeurige waarden van Ω slechts een identiek verdwijnend veld aan alle hierboven genoemde voorwaarden. Een uitzondering hierop vormen de velden die met specifieke waarden van Ω, de zogenaamde (complexe) resonantiecirkelfrequenties van de resonator, corresponderen. Deze uitzonderingswaarden van Ω duiden wij aan met Ω_m, waarin m een lopende index uit de rij van de gehele getallen is. De rij $\{\Omega_m\}$ is onbegrensd en het is gebruikelijk de volgorde zodanig te kiezen, dat $\mathrm{Re}(\Omega_m) \leq \mathrm{Re}(\Omega_n)$ voor $m < n$. Het bij Ω_m behorende elektromagnetische veld $\{\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}\}$ duiden wij aan met $\{\hat{\mathbf{E}}_m, \hat{\mathbf{H}}_m\}$. Een bepaalde natuurlijke trillingswijze van een resonator noemt men ook wel een *modus* ; Ω_m is de complexe resonantiecirkelfrequentie en $\{\hat{\mathbf{E}}_m, \hat{\mathbf{H}}_m\}$ de veldverdeling van de m-de modus. Daar de vergelijkingen (25.4) t/m (25.8) homogeen en lineair zijn, is de veldverdeling van een modus op een scalaire, multiplicatieve constante na bepaald. De waarden van deze constanten liggen vast als wordt vastgelegd op welke wijze de resonator wordt aangestoten.

Splitsen van Ω_m in reëel en imaginair deel geeft

$$\Omega_m = \omega_m + \mathrm{j}\delta_m, \tag{25.9}$$

waarin $\omega_m = \mathrm{Re}(\Omega_m)$ en $\delta_m = \mathrm{Im}(\Omega_m)$. Voor een passieve resonator is $\delta_m \geq 0$ voor alle m. De grootheid ω_m heet de (reële) *cirkelfrequentie* van de m-de modus en δ_m zijn *decrescentie* of *dempingscoëfficiënt*. Uit ω_m volgt de *frequentie* f_m van de m-de modus via de betrekking $\omega_m = 2\pi f_m$. Substitutie van

$$\exp(\mathrm{j}\Omega_m t) = \exp(-\delta_m t)\exp(\mathrm{j}\omega_m t) \tag{25.10}$$

in (25.3) laat zien, dat in het tijddomein de elektromagnetische veldgrootheden van de m-de modus zijn gegeven door

$$\{\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}_m(\mathbf{r}, t), \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, t), \mathbf{D}_m(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t)\}$$
$$= \exp(-\delta_m t)\,\mathrm{Re}[\{\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{D}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r})\}\exp(\mathrm{j}\omega_m t)]. \tag{25.11}$$

Iedere modus in een passieve resonator is derhalve een in de tijd niet-aangroeiende trilling met een bepaald veldpatroon. Als *kwaliteitsfactor* Q_m van de m-de modus voert men in de grootheid

$$Q_m \stackrel{\text{def}}{=\!=} \omega_m/2\delta_m \tag{25.12}$$

en als *relatieve bandbreedte* $\Delta\omega_m/\omega_m = \Delta f_m/f_m$ de grootheid

$$\Delta\omega_m/\omega_m = \Delta f_m/f_m \stackrel{\text{def}}{=\!=} 1/Q_m. \tag{25.13}$$

Hierin stellen $\Delta\omega_m$ en Δf_m de *absolute bandbreedte* van de m-de modus op respectievelijk cirkelfrequentie- en frequentieschaal voor.

Met betrekking tot de complexe resonantiecirkelfrequenties valt op te merken, dat zij paarsgewijs symmetrisch liggen ten opzichte van de imaginaire as in het complexe Ω-vlak. Dit is aan de hand van de volgende overwegingen in te zien. In de eerste plaats bevatten de elektromagnetische veldvergelijkingen in het tijddomein (25.1) en (25.2) alleen reële grootheden. Vervolgens leggen de constitutieve vergelijkingen in het tijddomein een verband tussen $\{\mathbf{J}, \mathbf{D}, \mathbf{B}\}$ enerzijds en $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ anderzijds en wel in de vorm van een aantal betrekkingen waarin slechts reële parameters en/of operatoren voorkomen (zie, bijvoorbeeld, (19.19), (19.20) en (19.21)). Tenslotte leiden de randvoorwaarden op de wand van de resonator in het tijddomein tot een aantal betrekkingen tussen $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ waarin wederom alleen reële parameters en/of operatoren voorkomen. Voor de veldgrootheden die de tijd via de factor $\exp(j\Omega t)$ bevatten, geldt derhalve, dat zij reëel zijn voor reële waarden van $j\Omega$ (dus op de imaginaire as in het complexe Ω-vlak). Op grond van het spiegelingsbeginsel van SCHWARZ uit de theorie van de functies van een complexe

Tabel 12. Transformatie die de verschillende veldgrootheden ondergaan bij spiegeling ten opzichte van de imaginaire as in het complexe Ω-vlak

$j\Omega$	$\rightarrow$	$(j\Omega)^*$
$\mathrm{Re}(\Omega)$	$\rightarrow$	$-\mathrm{Re}(\Omega)$
$\mathrm{Im}(\Omega)$	$\rightarrow$	$\mathrm{Im}(\Omega)$
$\{\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{B}}\}$	$\rightarrow$	$\{\hat{\mathbf{E}}^*, \hat{\mathbf{H}}^*, \hat{\mathbf{J}}^*, \hat{\mathbf{D}}^*, \hat{\mathbf{B}}^*\}$
$\{\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}\}$	$\rightarrow$	$\{\hat{\sigma}^*, \hat{\varepsilon}^*, \hat{\mu}^*\}$
randvoorwaarden	$\rightarrow$	randvoorwaarden*

* betekent toegevoegd complexe waarde

veranderlijke (zie bijvoorbeeld SPIEGEL[30]) nemen de veldgrootheden dan toegevoegd complexe waarden aan in punten waarvoor $j\Omega$ toegevoegd complexe waarden aanneemt. De transformatie die de diverse grootheden bij de overgang $j\Omega \rightarrow (j\Omega)^*$ ondergaan, is aangegeven in Tabel 12.

Aangezien echter de toegevoegd complexe veldgrootheden aan de toegevoegd complexe veldvergelijkingen, constitutieve vergelijkingen en randvoorwaarden voldoen, is met iedere veldverdeling die aan alle eisen voldoet bij een bepaalde waarde van $j\Omega$ ook de toegevoegd complexe veldverdeling er een die aan alle eisen voldoet en wel bij de waarde $(j\Omega)^*$. Dit resultaat geldt in het bijzonder voor een modus van de resonator. De complexe resonantiecirkelfrequenties liggen derhalve paarsgewijs symmetrisch ten opzichte van de imaginaire as in het complexe Ω-vlak en de veldverdelingen van de bijbehorende modi zijn elkaars toegevoegd complexe. Op grond hiervan is het voldoende die modi te onderzoeken waarvan de complexe resonantiecirkelfrequenties in het eerste kwadrant — met inbegrip van de randen — van het complexe Ω-vlak gelegen zijn. Via (25.3) worden de bij $j\Omega_m$ behorende modus met veldverdeling $\{\hat{\mathbf{E}}_m, \hat{\mathbf{H}}_m\}$ en de bij $(j\Omega_m)^*$ behorende modus met veldverdeling $\{\hat{\mathbf{E}}_m^*, \hat{\mathbf{H}}_m^*\}$ slechts als één modus in het tijddomein beschouwd. Voor de hierna te behandelen gevallen kunnen wij derhalve $\omega_m \geq 0$ stellen, terwijl reeds was ondersteld, dat $\delta_m \geq 0$, omdat de vrije trillingen in een passief systeem in de tijd niet kunnen aangroeien. Voor de veldgrootheden van m-de modus in het tijddomein wordt dan uit (25.11) verkregen

$$\begin{aligned}&\{\mathbf{E}_m(\mathbf{r},t), \mathbf{H}_m(\mathbf{r},t), \mathbf{J}_m(\mathbf{r},t), \mathbf{D}_m(\mathbf{r},t), \mathbf{B}_m(\mathbf{r},t)\}\\ &= \exp(-\delta_m t)\,[\mathrm{Re}\{\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{D}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r})\}\cos(\omega_m t)\\ &- \mathrm{Im}\{\hat{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{D}}_m(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r})\}\sin(\omega_m t)]\,. \qquad (25.14)\end{aligned}$$

De complexe resonantiecirkelfrequenties en de veldverdelingen van de verschillende modi hangen van de vorm en de grootte van de resonator af, alsmede van de elektromagnetische eigenschappen van het daarin aanwezige medium en van die van de wand(en). Onze verdere beschouwingen beperken wij tot het eenvoudigste geval van een resonator, nl. de resonator die bestaat uit het gebied dat wordt begrensd door twee onderling evenwijdige, oneindig uitgebreide, platte, reflecterende oppervlakken. Deze resonator is een bruikbaar model voor de in Fig. 52 aangegeven FABRY-PEROT resonator. De reflecterende randoppervlakken

30. SPIEGEL, M. R., *Complex variables*, Schaum's outline series, New York, McGraw-Hill Book Company, 1964, p. 266 en 279.

worden ook wel *spiegels* genoemd. In deze resonator onderzoeken wij de mogelijke *eendimensionale elektromagnetische vrije trillingen*. Wat hun plaatsafhankelijkheid betreft, hangen de veldgrootheden van deze trillingen slechts af van de ruimtelijke coördinaat loodrecht op het vlak van de spiegels. Om de plaats in de resonator vast te leggen, gebruiken wij een rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan de z-as loodrecht op het vlak van de spiegels staat (Fig. 55). De wanden

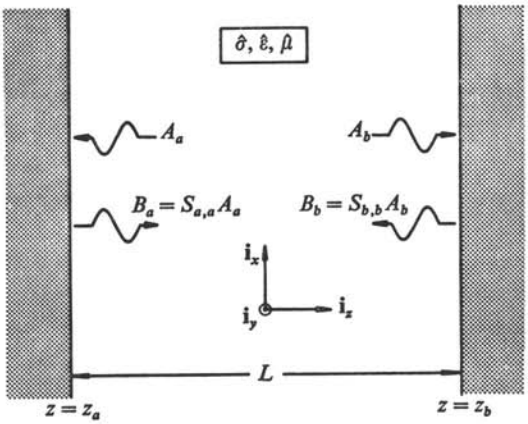


Fig. 55. Eendimensionale elektromagnetische vrije trillingen in een FABRY-PEROT *resonator.*

van de resonator zijn gegeven door $z = z_a$ en $z = z_b$ met $z_a < z_b$. De resonator beslaat dan het gebied $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z_a < z < z_b$.

Voor de te onderzoeken eendimensionale trillingen kunnen wij $\partial_x \equiv 0$ en $\partial_y \equiv 0$ stellen. Evenals in Par. 21 volgen dan uit (25.4) t/m (25.8) twee gescheiden stelsels vergelijkingen

$$-\partial_z \hat{H}_y = (\hat{\sigma} + j\Omega\hat{\varepsilon})\, \hat{E}_x, \tag{25.15}$$

$$\partial_z \hat{E}_x = -j\Omega\hat{\mu}\hat{H}_y \tag{25.16}$$

en

$$\partial_z \hat{H}_x = (\hat{\sigma} + j\Omega\hat{\varepsilon})\, \hat{E}_y, \tag{25.17}$$

$$-\partial_z \hat{E}_y = -j\Omega\hat{\mu}\hat{H}_x. \tag{25.18}$$

Verder is

$$\hat{E}_z = 0 \tag{25.19}$$

en

$$\hat{H}_z = 0, \tag{25.20}$$

zodat de eendimensionale vrije trillingen transversaal zijn. Verder onderstellen wij, dat het in de resonator aanwezige medium homogeen is, zodat $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ plaatsonafhankelijk zijn. In dit geval voldoen de niet-verdwijnende veldcomponenten elk aan de eendimensionale vergelijking van HELMHOLTZ

$$[\partial_z^2 - (\hat{\sigma}+\mathrm{j}\Omega\hat{\varepsilon})\,\mathrm{j}\Omega\hat{\mu}]\,\{\hat{E}_x, \hat{H}_y, \hat{E}_y, \hat{H}_x\} = 0, \tag{25.21}$$

die telkens door eliminatie van één van de veldcomponenten uit (25.15) en (25.16) of uit (25.17) en (25.18) ontstaat. In de vergelijkingen (25.15) t/m (25.18) komen de beide lineair gepolariseerde deelvelden $\{\hat{E}_x, \hat{H}_y\}$ en $\{\hat{E}_y, \hat{H}_x\}$ alleen gescheiden voor. Wij zullen nu onderstellen, dat ook de reflectie-eigenschappen van de spiegels niet tot een koppeling tussen deze beide deelvelden leiden. Dan kan de behandeling van deze beide deelvelden verder geheel gescheiden geschieden. Wel zal er verschil zijn tussen de beschrijving van de reflectie-eigenschappen van de spiegels op basis van de elektrische veldsterkte en die op basis van de magnetische veldsterkte. Dit mag echter niet van invloed zijn op de berekening van de complexe resonantiecirkelfrequenties, hetgeen ook uit de resultaten zal blijken.

Voor de beschrijving van de elektromagnetische velden in de resonator maken wij wederom gebruik van de golfmatrix $[\Psi] = [\Psi(z)]$, die in (21.21) is gedefinieerd. Als referentievlakken kiezen wij de wanden van de resonator $z = z_a$ en $z = z_b$. Wij voeren nu de in Fig. 55 aangegeven complexe amplitudes van Ψ^- en Ψ^+ ter plaatse $z = z_a$ en $z = z_b$ in en kunnen dan op grond van (21.22) stellen

$$\Psi^- = A_a \exp[\gamma(z-z_a)] = B_b \exp[\gamma(z-z_b)] \qquad \text{voor } z_a < z < z_b \tag{25.22}$$

en op grond van (21.23)

$$\Psi^+ = B_a \exp[-\gamma(z-z_a)] = A_b \exp[-\gamma(z-z_b)] \qquad \text{voor } z_a < z < z_b, \tag{25.23}$$

waarin

$$\gamma = [(\hat{\sigma}+\mathrm{j}\Omega\hat{\varepsilon})\,\mathrm{j}\Omega\hat{\mu}]^{\frac{1}{2}}. \tag{25.24}$$

Met betrekking tot de keuze van de vierkantswortel in het rechterlid van (25.24) zijn de in Par. 21 vastgelegde eisen van toepassing. Verder geldt voor het analytisch voortzetten van het rechterlid van (25.24) dezelfde *Opmerking* als op bladzijde 243 met betrekking tot $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ en $\hat{\mu}$ is gemaakt. De reflectie-eigenschappen van de spiegels karakteriseren wij door de betrekkingen

$$\lim_{z \downarrow z_a} \Psi^+(z) = S_{a,a} \lim_{z \downarrow z_a} \Psi^-(z) \tag{25.25}$$

en

$$\lim_{z \uparrow z_b} \Psi^-(z) = S_{b,b} \lim_{z \uparrow z_b} \Psi^+(z). \tag{25.26}$$

Hierin is $S_{a,a}$ de complexe reflectiefactor van de spiegel met randoppervlak $z = z_a$ en $S_{b,b}$ de complexe reflectiefactor van de spiegel met randoppervlak $z = z_b$. Uit (25.22) volgt de betrekking

$$A_a = B_b \exp(-\gamma L) \tag{25.27}$$

en uit (25.23)

$$B_a \exp(-\gamma L) = A_b, \tag{25.28}$$

waarin

$$L \stackrel{\text{def}}{=} z_b - z_a. \tag{25.29}$$

Substitutie van (25.22) en (25.23) in (25.25) en (25.26) geeft

$$B_a = S_{a,a} A_a \tag{25.30}$$

en

$$B_b = S_{b,b} A_b. \tag{25.31}$$

Uit (25.27), (25.28), (25.30) en (25.31) volgt door elimineren van B_b, A_b en B_a

$$[S_{a,a} S_{b,b} \exp(-2\gamma L) - 1] A_a = 0. \tag{25.32}$$

Voor een niet-identiek verdwijnend veld is $A_a \neq 0$. Zo'n veld kan slechts bestaan als $S_{a,a} S_{b,b} \neq 0$, terwijl verder moet gelden

$$S_{a,a} S_{b,b} \exp(-2\gamma L) = 1. \tag{25.33}$$

Met behulp van

$$S_{a,a} S_{b,b} = \exp[\ln|S_{a,a} S_{b,b}| + \mathrm{j} \arg(S_{a,a} S_{b,b})] \tag{25.34}$$

is (25.33) te herschrijven als

$$\exp[\ln|S_{a,a} S_{b,b}| + \mathrm{j} \arg(S_{a,a} S_{b,b}) - 2\gamma L] = \exp(-2q\pi\mathrm{j}), \tag{25.35}$$

waarin q een geheel getal is, waarvan het bereik nader dient te worden bepaald. Uit (25.35) volgt

$$\ln|S_{a,a}S_{b,b}| + \mathrm{j}\arg(S_{a,a}S_{b,b}) - 2\gamma L = -2q\pi\mathrm{j}. \tag{25.36}$$

Deze vergelijking is de frequentievergelijking waaruit de toelaatbare waarden Ω_m van Ω moeten worden berekend. De vergelijking is gecompliceerd, omdat in het algemeen behalve γ, ook $S_{a,a}$ en $S_{b,b}$ nog functies van Ω zijn. Daar $S_{a,a}$ en $S_{b,b}$ de randvoorwaarden op de wand van de FABRY-PEROT resonator weerspiegelen, voldoen zij bij de overgang $\mathrm{j}\Omega \rightarrow (\mathrm{j}\Omega)^*$ aan de in Tabel 12 weergegeven voorwaarde. Wat dit met betrekking tot de in (25.36) voorkomende termen inhoudt, is in Tabel 13 aangegeven.

Tabel 13. Transformatie die γ, $S_{a,a}$ en $S_{b,b}$ ondergaan bij spiegeling ten opzichte van de imaginaire as in het complexe Ω-vlak

$\mathrm{j}\Omega$	$\rightarrow$	$(\mathrm{j}\Omega)^*$
γ	$\rightarrow$	γ^*
$S_{a,a}$	$\rightarrow$	$S_{a,a}^*$
$S_{b,b}$	$\rightarrow$	$S_{b,b}^*$
$\ln\lvert S_{a,a}S_{b,b}\rvert$	$\rightarrow$	$\ln\lvert S_{a,a}S_{b,b}\rvert$
$\arg(S_{a,a}S_{b,b})$	$\rightarrow$	$-\arg(S_{a,a}S_{b,b})$

* betekent toegevoegd complexe waarde

Hieruit blijkt, dat als $\mathrm{j}\Omega_m$ een wortel van de frequentievergelijking (25.36) is, ook $(\mathrm{j}\Omega_m)^*$ een wortel is, zij het dat dan q door $-q$ moet worden vervangen, hetgeen ten aanzien van (25.33) geen wijziging inhoudt. Hiermede wordt voor het geval van een FABRY-PEROT resonator de algemene uitspraak omtrent de ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties in het complexe Ω-vlak bevestigd. Eenzelfde conclusie is van toepassing op de veldverdelingen van de modi.

In de hieronder te bespreken voorbeelden zullen wij onderstellen, dat $S_{a,a}$ en $S_{b,b}$ reëel zijn. Met het oog op het toekennen van een rangnummer aan de complexe resonantiecirkelfrequenties van de modi spreken wij verder af, dat

$$\arg(S_{a,a}S_{b,b}) = 0 \quad \text{als} \quad S_{a,a}S_{b,b} > 0 \tag{25.37}$$

en

$$\arg(S_{a,a}S_{b,b}) = \pi \quad \text{als} \quad S_{a,a}S_{b,b} < 0. \tag{25.38}$$

Omdat $0 < |S_{a,a}| \leq 1$ en $0 < |S_{b,b}| \leq 1$, geldt verder

$$\ln |S_{a,a} S_{b,b}| \leq 0 . \tag{25.39}$$

(a) FABRY-PEROT *resonator, gevuld met een medium waarvoor* $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, *waarin* ε *en* μ *reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn*

In dit geval gaat de frequentievergelijking (25.36) met gebruikmaking van (25.24) over in

$$2\mathrm{j}\Omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} L = \ln |S_{a,a} S_{b,b}| + \mathrm{j} \arg(S_{a,a} S_{b,b}) + 2\pi q \mathrm{j} . \tag{25.40}$$

Daar termen die $S_{a,a} S_{b,b}$ bevatten, nu geen aanleiding meer tot faseverandering geven, kunnen wij q vervangen door het rangnummer m van de modus. Voor de complexe resonantiecirkelfrequentie van de m-de modus volgt dan

$$\Omega_m = [2m\pi + \arg(S_{a,a} S_{b,b}) - \mathrm{j} \ln |S_{a,a} S_{b,b}|]/2(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} L$$
$$\text{met} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{25.41}$$

Uit (25.9) en (25.41) wordt verkregen

$$\omega_m = [2m\pi + \arg(S_{a,a} S_{b,b})]/2(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} L \tag{25.42}$$

en

$$\delta_m = [-\ln |S_{a,a} S_{b,b}|]/2(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} L . \tag{25.43}$$

De kwaliteitsfactor van de m-de modus is derhalve

$$Q_m = [2m\pi + \arg(S_{a,a} S_{b,b})]/2[-\ln |S_{a,a} S_{b,b}|] . \tag{25.44}$$

Voor de frequentie van de m-de modus volgt uit (25.42)

$$f_m = [m + (2\pi)^{-1} \arg(S_{a,a} S_{b,b})]\, c/2L , \tag{25.45}$$

waarin

$$c = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}} \tag{25.46}$$

de voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven in het beschouwde medium is. Voor het verschil tussen de frequenties van twee modi met opeenvolgende rangnummers volgt uit (25.45)

$$f_{m+1} - f_m = c/2L . \tag{25.47}$$

Hierin is $2L/c$ de tijd die een elektromagnetische golf nodig heeft om een volledige cyclus binnen de resonator te doorlopen. Uit (25.44) volgt tenslotte, dat Q_m toeneemt met toenemende waarde van m. In Fig. 56

is de ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties in het complexe Ω-vlak aangegeven.

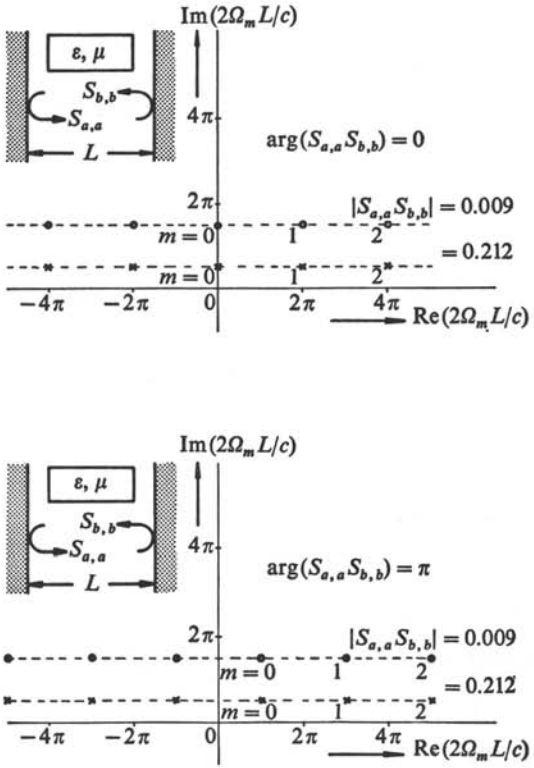


Fig. 56. Ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties van een FABRY-PEROT *resonator in het complexe Ω-vlak. De resonator is gevuld met een medium waarvoor $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, waarin ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn.*

(b) FABRY-PEROT *resonator, gevuld met een medium waarvoor $\hat{\sigma} = \sigma$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, waarin σ, ε en μ reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn*

In dit geval gaat de frequentievergelijking (25.36) over in

$$2[(\sigma + j\Omega\varepsilon)\, j\Omega\mu]^{\frac{1}{2}} L = \ln|S_{a,a}S_{b,b}| + j \arg(S_{a,a}S_{b,b}) + 2\pi q j . \quad (25.48)$$

Deze vergelijking kan worden herschreven als

$$\Omega^2 - \mathrm{j}(\sigma/\varepsilon)\,\Omega = \Omega^2_{q|\sigma=0}, \tag{25.49}$$

waarin

$$\Omega_{q|\sigma=0} = [2q\pi + \arg(S_{a,a}S_{b,b}) - \mathrm{j}\,\ln|S_{a,a}S_{b,b}|]/2(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}L \tag{25.50}$$

de complexe resonantiecirkelfrequentie van de q-de modus voorstelt voor het geval, dat $\sigma = 0$ (zie (25.41)). Uit (25.49) wordt voor de complexe

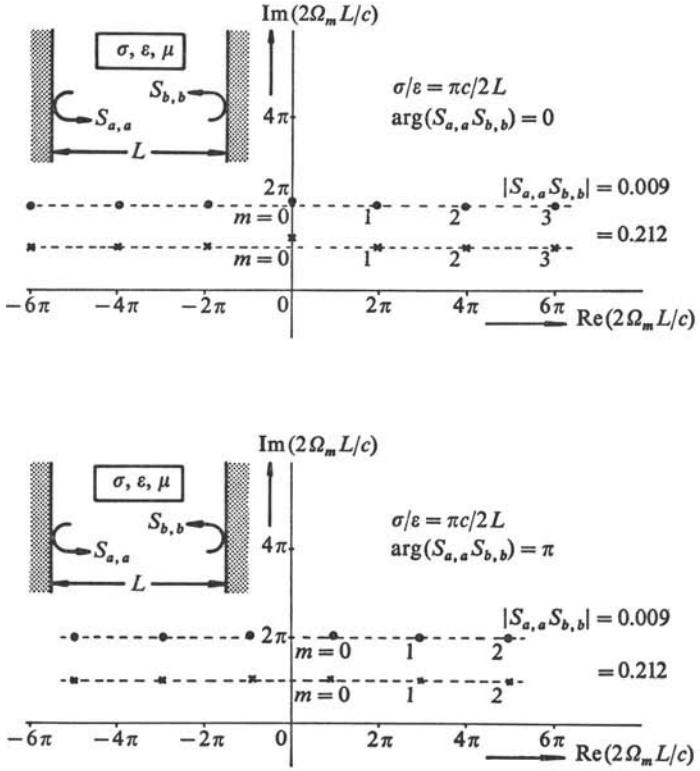


Fig. 57. Ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties van een FABRY-PEROT *resonator in het complexe Ω-vlak. De resonator is gevuld met een medium waarvoor* $\hat{\sigma} = \sigma$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon$, $\hat{\mu} = \mu$, *waarin* σ, ε *en* μ *reëel, positief en frequentie-onafhankelijk zijn.*

resonantiecirkelfrequentie van de m-de modus verkregen

$$\Omega_m = \mathrm{j}(\sigma/2\varepsilon) + [\Omega^2_{m|\sigma=0} - (\sigma/2\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{met} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25.51}$$

waarin $\mathrm{Re}[\ldots]^{\frac{1}{2}} \geq 0$ en $\mathrm{Im}[\ldots]^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Uit (25.51) zijn met behulp van de procedures voor de berekening van de vierkantswortel uit een complex getal (zie Aanhangsel C) ω_m en δ_m te bepalen. In Fig. 57 is de ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties in het complexe Ω-vlak aangegeven.

Voor die waarden van m waarvoor $\sigma/2\varepsilon \ll |\Omega_{m|\sigma=0}|$, is de uitdrukking voor Ω_m te benaderen door

$$\Omega_m \simeq \omega_{m|\sigma=0} + \mathrm{j}(\delta_{m|\sigma=0} + \sigma/2\varepsilon) \quad \text{voor} \quad \sigma/2\varepsilon \ll |\Omega_{m|\sigma=0}|, \tag{25.52}$$

waarin $\omega_{m|\sigma=0} = \mathrm{Re}(\Omega_{m|\sigma=0})$ is gegeven door het rechterlid van (25.42) en $\delta_{m|\sigma=0} = \mathrm{Im}(\Omega_{m|\sigma=0})$ is gegeven door het rechterlid van (25.43). In dezelfde benadering volgt voor het verschil tussen de frequenties van twee modi met opeenvolgende rangnummers uit (25.52)

$$f_{m+1} - f_m \simeq c/2L \quad \text{voor} \quad \sigma/2\varepsilon \ll |\Omega_{m|\sigma=0}|, \tag{25.53}$$

waarin wederom $c = (\varepsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$. Voor de kwaliteitsfactor van de m-de modus geldt in dezelfde benadering

$$1/Q_m \simeq 1/Q_{m,\,\text{spiegels}} + 1/Q_{m,\,\text{medium}} \quad \text{voor} \quad \sigma/2\varepsilon \ll |\Omega_{m|\sigma=0}|, \tag{25.54}$$

waarin

$$Q_{m,\,\text{spiegels}} \overset{\text{def}}{=\!=} \omega_{m|\sigma=0}/2\delta_{m|\sigma=0} \tag{25.55}$$

als de kwaliteitsfactor van de spiegels alleen en

$$Q_{m,\,\text{medium}} \overset{\text{def}}{=\!=} \omega_{m|\sigma=0}\,\varepsilon/\sigma \tag{25.56}$$

als de kwaliteitsfactor van het medium alleen kan worden beschouwd, beide voor de m-de modus.

(c) FABRY-PEROT *resonator, gevuld met een botsingsvrij plasma*

Hiervoor geldt $\hat{\sigma} = 0$, $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_p(\Omega)$ en $\mu = \mu_0$, waarin $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\Omega)$ is gegeven door (zie (21.88))

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\Omega^2); \tag{25.57}$$

de grootheid ω_p stelt de plasmacirkelfrequentie voor. Voor dit medium

gaat de frequentievergelijking (25.36) over in

$$2\mathrm{j}\Omega(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}(1-\omega_\mathrm{p}^2/\Omega^2)^{\frac{1}{2}}L = \ln|S_{a,a}S_{b,b}| + \mathrm{j}\arg(S_{a,a}S_{b,b}) + 2\pi q\mathrm{j}. \tag{25.58}$$

Deze vergelijking kan worden herschreven als

$$\Omega^2-\omega_\mathrm{p}^2 = \Omega_{q,0}^2, \tag{25.59}$$

waarin

$$\Omega_{q,0} = [2q\pi + \arg(S_{a,a}S_{b,b}) - \mathrm{j}\ln|S_{a,a}S_{b,b}|]/2(\varepsilon_0\mu_0)^{\frac{1}{2}}L \tag{25.60}$$

de complexe resonantiecirkelfrequentie van de q-de modus voorstelt voor het geval, dat in de resonator vacuüm aanwezig is (zie (25.41) met

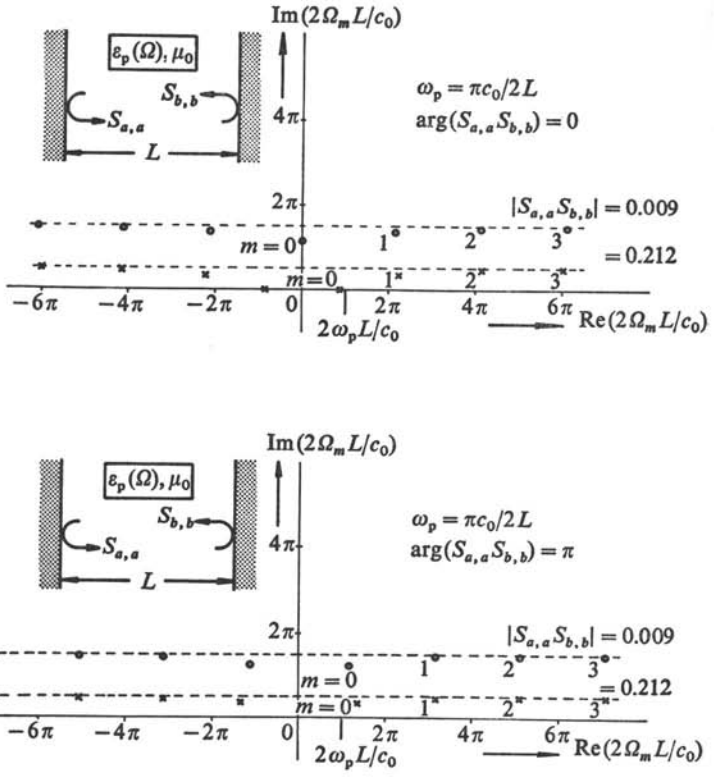


Fig. 58. Ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties van een FABRY-PEROT *resonator in het complexe Ω-vlak. De resonator is gevuld met een botsingsvrij plasma, waarvan* ω_p *de plasmacirkelfrequentie is.*

$\varepsilon = \varepsilon_0$ en $\mu = \mu_0$). Uit (25.59) wordt voor de complexe resonantiecirkelfrequentie van de m-de modus verkregen

$$\Omega_m = (\omega_p^2 + \Omega_{m,0}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{met} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25.61}$$

waarin $\mathrm{Re}(\ldots)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ en $\mathrm{Im}(\ldots)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Uit (25.61) zijn met behulp van de procedures voor de berekening van de vierkantswortel uit een complex getal (zie Aanhangsel C) ω_m en δ_m te bepalen. In Fig. 58 is de ligging van de complexe resonantiecirkelfrequenties in het complexe Ω-vlak aangegeven.

De hier verkregen resultaten vormen de basis voor een methode om met behulp van een FABRY-PEROT resonator langs experimentele weg van een onbekend plasma de plasmacirkelfrequentie te bepalen. Van een bepaalde FABRY-PEROT resonator worden dan eerst de complexe resonantiecirkelfrequenties $\Omega_{m,0}$ gemeten; hierbij is in de resonator vacuüm aanwezig. Daarna wordt de resonator gevuld met het te onderzoeken plasma en worden de complexe resonantiecirkelfrequenties Ω_m gemeten. De plasmacirkelfrequentie volgt dan onder toepassing van (25.61) uit de betrekking $\omega_p = (\Omega_m^2 - \Omega_{m,0}^2)^{\frac{1}{2}}$, die voor $m = 0, 1, 2, \ldots$ geldt. Wanneer van het plasma bekend is uit welk type geladen deeltjes het bestaat, volgt de concentratie van deze deeltjes uit de betrekking $N = \omega_p^2 \varepsilon_0 m/q^2$ (zie Vraagstuk 21.11)).

De experimentele bepaling van de complexe resonantiecirkelfrequentie Ω_m van een modus geschiedt doorgaans door van de desbetreffende modus de frequentie f_m en de absolute bandbreedte Δf_m te meten. De bijbehorende Ω_m volgt dan uit de betrekking

$$\Omega_m = 2\pi f_m + \mathrm{j}\pi\Delta f_m = 2\pi(f_m + \mathrm{j}\tfrac{1}{2}\Delta f_m). \tag{26.62}$$

Bij deze meetmethode wordt de resonator geëxciteerd door een bron met variabele frequentie en wordt voor de aldus gegenereerde gedwongen trillingen de resonator als een dissipatief systeem van de tweede orde opgevat (zie bijvoorbeeld EDMINISTER[31]).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 25.1. In de in Fig. 55 weergegeven FABRY-PEROT resonator is de ruimte tussen de spiegels vacuüm. De reflectiefactoren van de spiegels zijn zodanig, dat $S_{a,a}S_{b,b}$ reëel en positief is. Bepaal (a) de complexe cirkelfrequentie Ω_m, (b) de reële cirkelfrequentie ω_m, (c) de dempingscoëfficiënt δ_m, (d) de kwaliteitsfactor Q_m, (e) de frequentie f_m en (f) de absolute bandbreedte Δf_m van de m-de modus.

31. EDMINISTER, J. A., *Electric circuits*, Schaum's outline series, New York, McGraw–Hill Book Company, 1965, p. 84.

Antwoord: (a) $\Omega_m = m\pi c_0/L - jc_0 \ln(S_{a,a}S_{b,b})/2L$; (b) $\omega_m = m\pi c_0/L$; (c) $\delta_m = -c_0 \ln(S_{a,a}S_{b,b})/2L$; (d) $Q_m = m\pi/[-\ln(S_{a,a}S_{b,b})]$, (e) $f_m = mc_0/2L$; (f) $\Delta f_m = \delta_m/\pi = -c_0 \ln(S_{a,a}S_{b,b})/2\pi L$. Hierin is $m = 0, 1, 2, \ldots$ (Het geval $m = 0$ correspondeert niet met een trilling, doch met een exponentieel in de tijd gedempt veld.)

Vraagstuk 25.2. Bepaal van de in Vraagstuk 25.1 beschouwde FABRY-PEROT resonator (a) de frequentie f_m, (b) de kwaliteitsfactor Q_m en (c) de absolute bandbreedte Δf_m van de m-de modus, als $L = 1$ m, $|S_{a,a}| = 0.996$ en $|S_{b,b}| = 0.980$. (Maak gebruik van de gegevens $\ln(0.996) = -0.00400$ en $\ln(0.980) = -0.02020$.)
Antwoord: (a) $f_m = m \times 149.90$ MHz; (b) $Q_m = m \times 129.82$, (c) $\Delta f_m = 1.1547$ MHz.

Vraagstuk 25.3. Bepaal van de in Vraagstuk 25.1 beschouwde FABRY-PEROT resonator het verschil tussen de frequenties van twee modi met opeenvolgende rangnummers als $L = 1$ m.
Antwoord: $f_{m+1} - f_m = 149.90$ MHz.

Vraagstuk 25.4. In de in Fig. 55 weergegeven FABRY-PEROT resonator is de ruimte tussen de spiegels vacuüm. Van deze resonator worden de grootheden L, f_m en Δf_m gemeten. Welke waarde van $S_{a,a}S_{b,b}$ volgt uit de gemeten grootheden?
Antwoord: $S_{a,a}S_{b,b} = \exp[(j2\pi f_m - \pi\Delta f_m)2L/c_0]$.

Vraagstuk 25.5. Stel in Vergelijking (25.61) $\Omega_m = \omega_m + j\delta_m$ en $\Omega_{m,0} = \omega_{m,0} + j\delta_{m,0}$ en bewijs, dat de betrekkingen $\omega_m\delta_m = \omega_{m,0}\delta_{m,0}$ en $\omega_m^2 - \delta_m^2 = \omega_p^2 + \omega_{m,0}^2 - \delta_{m,0}^2$ gelden.

Vraagstuk 25.6. De in Fig. 55 weergegeven FABRY-PEROT resonator wordt gebruikt in een gaslaser. De laser werkt bij een emissielijn waarvan de lijnbreedte Δf_e bedraagt. Van hoeveel modi kunnen de frequenties in het interval ter breedte Δf_e liggen? (Voor de bepaling van de vrije trillingen mag worden ondersteld, dat in de resonator vacuüm aanwezig is.)
Antwoord: aantal modi $= \text{ent}(2L\Delta f_e/c_0)$ of aantal modi $= \text{ent}(2L\Delta f_e/c_0) + 1$, afhankelijk van de ligging van Δf_e.

Vraagstuk 25.7. De in Fig. 55 weergegeven FABRY-PEROT resonator wordt gebruikt in een gaslaser. De laser werkt bij een emissielijn waarvan de lijnbreedte Δf_e bedraagt. Aan welke ongelijkheid moet L voldoen, om er zeker van te zijn, dat er in het interval Δf_e de frequentie van ten hoogste één modus ligt? (Voor de bepaling van de vrije trillingen mag worden ondersteld, dat in de resonator vacuüm aanwezig is.)
Antwoord: $L < c_0/2\Delta f_e$.

Vraagstuk 25.8. Hoe luidt het antwoord van Vraagstuk 25.7 voor de in een heliumneonlaser veel gebruikte emissielijn met golflengte in vacuüm $\lambda_e = 632.8$ nm en lijnbreedte $\Delta f_e = 1.7$ GHz?
Antwoord: $L < 88$ mm. (Bij de constructie van bepaalde gaslasers speelt deze voorwaarde een belangrijke rol; zie, bijvoorbeeld, HAISMA, J., „Construction and properties of short stable gas lasers", Philips Res. Repts. Suppl., 1967, Nr. 1, pp. 1–76.)

26. Driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven in het frequentiedomein. Uniforme en niet-uniforme vlakke golven

In deze paragraaf bestuderen wij de eigenschappen van de driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven in het frequentiedomein*. Als complexe tijdfactor gebruiken wij $\exp(j\omega t)$. De plaats in de ruimte leggen wij vast met behulp van een rechts-cyclisch, Cartesiaans coördinatenstelsel waarin de plaatsvector $\mathbf{r}$ wordt gegeven door

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z . \tag{26.1}$$

De veldgrootheden van de te onderzoeken golven voldoen aan de elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein (zie (18.1) en (18.2))

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \tag{26.2}$$

en

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}. \tag{26.3}$$

Uit (18.3) t/m (18.5) volgt verder

$$\mathrm{div}(\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) = 0 \tag{26.4}$$

en

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{26.5}$$

Omtrent het medium waarin het golfverschijnsel optreedt, onderstellen wij, dat het in het frequentiedomein constitutieve vergelijkingen van de gedaante (18.18) t/m (18.20) bezit. Wij onderzoeken nu het elektromagnetische veld in een homogeen deel van het medium, alwaar (18.18) t/m (18.20) overgaan in

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \tag{26.6}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \tag{26.7}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega)\,\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \tag{26.8}$$

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

waarin σ, ε en μ plaatsonafhankelijk zijn. Substitutie van (26.6) t/m (26.8) in (26.2) en (26.3) leidt tot

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\mathbf{E} \tag{26.9}$$

en

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}. \tag{26.10}$$

Verder volgt uit (26.4), (26.6) en (26.7)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0, \tag{26.11}$$

hetgeen in overeenstemming is met (26.9), en uit (26.5) en (26.8)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \tag{26.12}$$

hetgeen in overeenstemming is met (26.10).

Teneinde naast (26.9) t/m (26.12) ook vergelijkingen voor de veldgrootheden afzonderlijk ter beschikking te hebben, gaan wij achtereenvolgens **H** en **E** uit (26.9) en (26.10) elimineren, waarbij (26.11) en (26.12) al of niet kunnen worden gebruikt. Eliminatie van **H** uit (26.9) en (26.10) geeft

$$\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{E} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{E}. \tag{26.13}$$

Met behulp van de vectoriële identiteit

$$\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E}, \tag{26.14}$$

waarin $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ de operator van LAPLACE voorstelt en met gebruikmaking van (26.11) is (26.13) te herleiden tot

$$\nabla^2\mathbf{E} - (\sigma + j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{26.15}$$

Opgemerkt dient te worden, dat slechts de divergentievrije oplossingen van deze vectoriële vergelijking van HELMHOLTZ (zie ook (21.14)) mogelijke elektrische veldsterkten zijn; de bijbehorende magnetische veldsterkte is dan te bepalen met behulp van (26.10).

Evenzo geeft eliminatie van **E** uit (26.9) en (26.10)

$$\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{H} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{H}. \tag{26.16}$$

Met behulp van de vectoriële identiteit

$$\mathbf{rot\ rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H} \tag{26.17}$$

en met gebruikmaking van (26.12) is (26.16) te herleiden tot

$$\nabla^2\mathbf{H} - (\sigma + j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{26.18}$$

Opgemerkt dient te worden, dat slechts de divergentievrije oplossingen van deze vectoriële vergelijking van HELMHOLTZ mogelijke magnetische veldsterkten zijn; de bijbehorende elektrische veldsterkte is dan te bepalen met behulp van (26.9).

Het is eenvoudig te verifiëren, dat (26.15) en (26.18) vectoriële oplossingen toelaten van een zodanige vorm, dat ieder Cartesiaans kental van de veldvectoren — dus E_x, E_y en E_z, respectievelijk H_x, H_y en H_z — van de plaats afhangt via de factor $\exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})$, waarin

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_x \mathbf{i}_x + \gamma_y \mathbf{i}_y + \gamma_z \mathbf{i}_z \tag{26.19}$$

een nader te bepalen constante, complexe vector is. Elektromagnetische velden van deze gedaante noemen wij *driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven.* Voor het geval, dat $\boldsymbol{\gamma}$ alleen een z-component heeft en de elektromagnetische veldvectoren bijgevolg alleen van z afhangen, gaan de driedimensionale vlakke golven over in de in Par. 21 behandelde eendimensionale golven.

Teneinde de eigenschappen van driedimensionale, vlakke golven te bestuderen, stellen wij

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}) \tag{26.20}$$

en

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} \exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}), \tag{26.21}$$

waarin $\mathbf{e}$ en $\mathbf{h}$ constante, complexe vectoren zijn. Vervolgens substitueren wij (26.20) en (26.21) in (26.9) en (26.10). Daar $\mathbf{e}$ en $\mathbf{h}$ constant zijn, geldt $\nabla \times \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = [\nabla \exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})] \times \{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$. Verder maken wij gebruik van de eigenschap

$$\begin{aligned} \nabla \exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}_x\partial_x + \mathbf{i}_y\partial_y + \mathbf{i}_z\partial_z) \exp(-\gamma_x x - \gamma_y y - \gamma_z z) \\ &= -(\gamma_x \mathbf{i}_x + \gamma_y \mathbf{i}_y + \gamma_z \mathbf{i}_z) \exp(-\gamma_x x - \gamma_y y - \gamma_z z) \\ &= -\boldsymbol{\gamma} \exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{26.22}$$

Na deling door de factor $\exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})$, die nooit de waarde nul heeft, ontstaat dan het resultaat

$$-\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{h} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, \mathbf{e} \tag{26.23}$$

en

$$-\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} = -j\omega\mu\mathbf{h}. \tag{26.24}$$

Op dezelfde wijze ontstaat uit (26.11) en (26.12)

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e} = 0 \tag{26.25}$$

en

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{26.26}$$

Eliminatie van $\mathbf{h}$ uit (26.23) en (26.24) geeft

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{e}) = -(\sigma+j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{e}. \tag{26.27}$$

Met behulp van de vectoriële identiteit

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{e}) = (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e})\,\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{e} \tag{26.28}$$

en met gebruikmaking van (26.25) is (26.27) te herleiden tot

$$[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} - (\sigma+j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu]\,\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{26.29}$$

Hieruit volgt, dat voor een niet-identiek verdwijnende, driedimensionale, vlakke golf $\boldsymbol{\gamma}$ aan de volgende vergelijking moet voldoen

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} = (\sigma+j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu. \tag{26.30}$$

Voor de eendimensionale golven die ontstaan als $\boldsymbol{\gamma}$ alleen een z-component heeft, is (26.30) gelijkwaardig met (21.15).

Evenzo geeft eliminatie van $\mathbf{e}$ uit (26.23) en (26.24)

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{h}) = -(\sigma+j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu\mathbf{h}. \tag{26.31}$$

Met behulp van de vectoriële identiteit

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{h}) = (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{h})\,\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,\mathbf{h} \tag{26.32}$$

en met gebruikmaking van (26.26) is (26.31) te herleiden tot

$$[\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\gamma} - (\sigma+j\omega\varepsilon)\,j\omega\mu]\,\mathbf{h} = \mathbf{0}. \tag{26.33}$$

Wat de vergelijking voor $\boldsymbol{\gamma}$ betreft, leidt dit wederom tot (26.30).

Om de structuur van een driedimensionale, vlakke golf verder te analyseren, schrijven wij de vector $\boldsymbol{\gamma}$, die de *complexe voortplantingsvector* van de golf wordt genoemd, als

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}+j\boldsymbol{\beta}, \tag{26.34}$$

waarin

$$\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Re}(\boldsymbol{\gamma}) \tag{26.35}$$

de *verzwakkingsvector* en

$$\boldsymbol{\beta} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Im}(\boldsymbol{\gamma}) \tag{26.36}$$

de *fasevector* van de golf aangeeft. De vector $\boldsymbol{\alpha}$ wordt uitgedrukt in neper/meter (Np/m), de vector $\boldsymbol{\beta}$ in radiaal/meter (rad/m). Uit de eigen-

schap

$$|\exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})| = \exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}) \tag{26.37}$$

volgt, dat de platte vlakken $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r} = \textit{constante}$ de *oppervlakken van gelijke amplitude* zijn. Evenzo volgt uit de eigenschap

$$\arg[\exp(-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{r})] = -\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}, \tag{26.38}$$

dat de platte vlakken $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r} = \textit{constante}$ de *oppervlakken van gelijke fase* zijn. Aan deze twee eigenschappen ontlenen de elektromagnetische velden van de gedaante (26.20), (26.21) hun naam van „vlakke" golf. In het algemeen hebben de (reële) vectoren $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ niet dezelfde richting, zodat de vlakken van gelijke fase dan niet evenwijdig zijn aan de vlakken van gelijke amplitude. Indien deze toestand zich voordoet, noemen wij de vlakke golf *niet-uniform*. Indien $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ wel dezelfde richting hebben, zijn de vlakken van gelijke fase evenwijdig aan de vlakken van gelijke amplitude en noemen wij de vlakke golf *uniform*. Dit bijzondere geval zullen wij verderop in deze paragraaf apart bespreken.

Naar analogie met de overeenkomstige grootheden voor eendimensionale golven voeren wij nu ook voor driedimensionale golven de grootheden fasesnelheid, golflengte, golfadmittantie, golfimpedantie en complexe brekingsindex in. De *vectoriële fasesnelheid* $\mathbf{v}_{ph}$ voeren wij in als de vector

$$\mathbf{v}_{ph} = \omega\boldsymbol{\beta}/(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}), \tag{26.39}$$

zodat (zie (21.19))

$$\mathbf{v}_{ph}\cdot\boldsymbol{\beta} = \omega. \tag{26.40}$$

De *vectoriële golflengte* $\boldsymbol{\lambda}$ wordt ingevoerd als de vector

$$\boldsymbol{\lambda} = 2\pi\boldsymbol{\beta}/(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}), \tag{26.41}$$

zodat (zie (21.20))

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\beta} = 2\pi. \tag{26.42}$$

Uit (26.39) en (26.41) volgt de betrekking $\mathbf{v}_{ph} = f\boldsymbol{\lambda}$, waarin $f = \omega/2\pi$. De *vectoriële golfadmittantie* $\mathbf{Y}$ voeren wij in als (zie (21.33))

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\gamma}/\mathrm{j}\omega\mu \tag{26.43}$$

en de *vectoriële golfimpedantie* $\mathbf{Z}$ als (zie (21.34))

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\gamma}/(\sigma+\mathrm{j}\omega\varepsilon). \tag{26.44}$$

Uit (26.43), (26.44) en (26.30) volgt

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{Z} = 1, \tag{26.45}$$

hetgeen voor eendimensionale golven met (21.35) overeenkomt. Met behulp van (26.43) en (26.44) zijn (26.23) en (26.24) te herschrijven als

$$\mathbf{h}\times\mathbf{Z} = \mathbf{e} \tag{26.46}$$

en

$$\mathbf{Y}\times\mathbf{e} = \mathbf{h}. \tag{26.47}$$

Tenslotte voeren wij de *vectoriële complexe brekingsindex* $\mathbf{n}$ in via de betrekking (zie (21.53))

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathrm{j}(\omega/c_0)\,\mathbf{n}, \tag{26.48}$$

waarin wij (zie (21.52))

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \mathrm{j}\mathbf{n}'' \tag{26.49}$$

kunnen stellen met $\mathbf{n}' \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathrm{Re}(\mathbf{n})$ en $\mathbf{n}'' \stackrel{\text{def}}{=\!=} -\mathrm{Im}(\mathbf{n})$. Uit (26.48), (26.49) en (26.34) volgt

$$\boldsymbol{\alpha} = (\omega/c_0)\,\mathbf{n}'' \tag{25.50}$$

en

$$\boldsymbol{\beta} = (\omega/c_0)\,\mathbf{n}'. \tag{26.51}$$

Substitutie van (26.48) in (26.30) leidt tot

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = (\sigma/\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 + \varepsilon_r)\,\mu_r \tag{26.52}$$

als vergelijking waaraan $\mathbf{n}$ moet voldoen.

Wat de *polarisatietoestand* van een driedimensionale, vlakke golf betreft, valt op te merken, dat in het algemeen zowel de elektrische als de magnetische veldsterkte van de golf elliptisch gepolariseerd is. Tabel 14 geeft een overzicht van de bijzondere polarisatietoestanden; de daarin opgenomen kenmerken zijn ontleend aan (15.29) en (15.30).

De over een periode (in de tijd) gemiddelde *oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom* wordt gegeven door (zie (15.37))

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*). \tag{26.53}$$

Substitutie van (26.20) en (26.21) in (26.53) leidt tot

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = [\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{e}\times\mathbf{h}^*)]\exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}), \tag{26.54}$$

waarin van (26.34) gebruik is gemaakt. De uitdrukking in het rechterlid

Tabel 14. Polarisatietoestand van de elektrische en de magnetische veldsterkte van een driedimensionale, vlakke golf

	elektrische veldsterkte	*magnetische veldsterkte*
lineair gepolariseerd	$\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*=\mathbf{0}$	$\mathbf{h}\times\mathbf{h}^*=\mathbf{0}$
circulair gepolariseerd	$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=0$	$\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}=0$
elliptisch gepolariseerd	in alle andere gevallen	

is in het algemeen niet verder te vereenvoudigen. Enkele bijzondere gevallen waarin dit wel lukt, zullen verderop worden besproken.

In een aantal gevallen kunnen verdergaande conclusies worden getrokken ten aanzien van het gedrag van de golven. Deze gevallen hebben betrekking op een speciale polarisatietoestand, een speciale propagatievoorwaarde, dan wel een speciaal medium. Deze worden nu aan de orde gesteld.

(a) *Lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte*

Voor een vlakke golf met een lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte geldt (zie Tabel 14)

$$\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*=\mathbf{0}. \tag{26.55}$$

Hiermee is ook

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{e}^*)=\mathbf{0}, \tag{26.56}$$

zodat

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*)\,\mathbf{e}-(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e}^*=\mathbf{0}. \tag{26.57}$$

Met inachtneming van (26.25) volgt hieruit

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{e}^*=0 \quad \text{of} \quad \boldsymbol{\gamma}^*\cdot\mathbf{e}=0 \tag{26.58}$$

en daarmee op grond van (26.43) tevens

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{e}^*=0 \quad \text{of} \quad \mathbf{Y}^*\cdot\mathbf{e}=0. \tag{26.59}$$

Met behulp van dit resultaat is de uitdrukking (26.54) voor de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom verder te vereenvoudigen. Met

gebruikmaking van (26.47) is namelijk

$$\mathbf{e}\times\mathbf{h}^* = \mathbf{e}\times(\mathbf{Y}^*\times\mathbf{e}^*) = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*)\,\mathbf{Y}^* - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{Y}^*)\,\mathbf{e}^*. \tag{26.60}$$

Substitutie van (26.59) in (26.60) en van het resultaat in (26.54) leidt tot

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{Y}^*)\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*)\exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}). \tag{26.61}$$

Opgemerkt wordt, dat in dit geval de lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte loodrecht op het vlak door $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ staat en dat de — in het algemeen elliptisch gepolariseerde — magnetische veldsterkte in het vlak door $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ ligt (zie (26.24)).

(b) *Lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte*

De behandeling van dit geval verloopt geheel analoog met die van het onder (a) besproken geval van een lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte. Voor een vlakke golf met een lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte geldt (zie Tabel 14)

$$\mathbf{h}\times\mathbf{h}^* = \mathbf{0}. \tag{26.62}$$

Hiermee is ook

$$\boldsymbol{\gamma}\times(\mathbf{h}\times\mathbf{h}^*) = \mathbf{0}, \tag{26.63}$$

zodat

$$(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{h}^*)\,\mathbf{h} - (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{h})\,\mathbf{h}^* = \mathbf{0}. \tag{26.64}$$

Met inachtneming van (26.26) volgt hieruit

$$\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{h}^* = 0 \quad \text{of} \quad \boldsymbol{\gamma}^*\cdot\mathbf{h} = 0 \tag{26.65}$$

en daarmee op grond van (26.44) tevens

$$\mathbf{Z}\cdot\mathbf{h}^* = 0 \quad \text{of} \quad \mathbf{Z}^*\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{26.66}$$

Met behulp van dit resultaat is de uitdrukking (26.54) voor de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom verder te vereenvoudigen. Met gebruikmaking van (26.46) is namelijk

$$\mathbf{e}\times\mathbf{h}^* = (\mathbf{h}\times\mathbf{Z})\times\mathbf{h}^* = (\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^*)\,\mathbf{Z} - (\mathbf{h}^*\cdot\mathbf{Z})\,\mathbf{h}. \tag{26.67}$$

Substitutie van (26.66) in (26.67) en van het resultaat in (26.54) leidt tot

$$\langle\mathbf{S}\rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{Z})\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^*)\exp(-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{r}). \tag{26.68}$$

Opgemerkt wordt, dat in dit geval de lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte loodrecht op het vlak door $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ staat en dat de — in het

algemeen elliptisch gepolariseerde — elektrische veldsterkte in het vlak door $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ ligt (zie (26.23)).

(c) *Uniforme vlakke golf*

Voor een uniforme vlakke golf hebben $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ dezelfde (of tegengestelde) richting. Laat $\mathbf{s}$ de constante eenheidsvector in de richting van $\boldsymbol{\alpha}$ en/of $\boldsymbol{\beta}$ zijn, dan kunnen wij stellen

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{s}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{s}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \gamma\mathbf{s}, \tag{26.69}$$

waarin op grond van (26.34)

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta. \tag{26.70}$$

Substitutie van $\boldsymbol{\gamma} = \gamma\mathbf{s}$ in (26.30) geeft, met $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = 1$,

$$\gamma^2 = (\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\,\mathrm{j}\omega\mu, \tag{26.71}$$

hetgeen dezelfde vergelijking is als (21.15). Bij de in Par. 21 gemaakte afspraken omtrent de waarde van de vierkantswortel in

$$\gamma = [(\sigma + \mathrm{j}\omega\varepsilon)\,\mathrm{j}\omega\mu]^{\frac{1}{2}} \tag{26.72}$$

is de uniforme vlakke golf derhalve niets anders dan een eendimensionale golf in de richting van $\mathbf{s}$, welke vector een willekeurige stand ten opzichte van de assen van het gekozen coördinatenstelsel kan hebben. (In Par. 21 was $\mathbf{s} = \mathbf{i}_z$ of $\mathbf{s} = -\mathbf{i}_z$.)

Substitutie van $\boldsymbol{\gamma} = \gamma\mathbf{s}$ in (26.25) en (26.26) geeft

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{e} = 0 \tag{26.73}$$

en

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{h} = 0; \tag{26.74}$$

de uniforme vlakke golf is derhalve transversaal. Substitutie van $\boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{s}$ in (26.39) en (26.41) geeft

$$\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = (\omega/\beta)\mathbf{s} \tag{26.75}$$

en

$$\boldsymbol{\lambda} = (2\pi/\beta)\mathbf{s}. \tag{26.76}$$

Substitutie van $\boldsymbol{\gamma} = \gamma\mathbf{s}$ in (26.43) en (26.44) geeft

$$\mathbf{Y} = Y\mathbf{s} \qquad \text{met} \qquad Y = \gamma/\mathrm{j}\omega\mu \tag{26.77}$$

en

$$\mathbf{Z} = Z\mathbf{s} \qquad \text{met} \qquad Z = \gamma/(\sigma+j\omega\varepsilon). \tag{26.78}$$

Substitutie van (26.77) en (26.78) in (26.46) en (26.47) geeft

$$Z(\mathbf{h}\times\mathbf{s}) = \mathbf{e} \tag{26.79}$$

en

$$Y(\mathbf{s}\times\mathbf{e}) = \mathbf{h}. \tag{26.80}$$

Met behulp van deze resultaten is de uitdrukking (26.54) voor de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom verder te vereenvoudigen. Er geldt namelijk

$$\mathbf{e}\times\mathbf{h}^* = Y^*\mathbf{e}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{e}^*) = Y^*(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*)\,\mathbf{s}, \tag{26.81}$$

waarin van (26.80) en (26.73) gebruik is gemaakt en

$$\mathbf{e}\times\mathbf{h}^* = Z(\mathbf{h}\times\mathbf{s})\times\mathbf{h}^* = Z(\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^*)\,\mathbf{s}, \tag{26.82}$$

waarin van (26.79) en (26.74) gebruik gemaakt is. Substitutie van (26.81) en (26.82) in (26.54) geeft

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{S}\rangle_T &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Y^*)\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^*)\,\mathbf{s}\exp(-2\alpha\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}),\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(Z)\,(\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^*)\,\mathbf{s}\exp(-2\alpha\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{26.83}$$

Dit resultaat stemt met (21.43) overeen als $\mathbf{s}=\mathbf{i}_z$ en met (21.44) als $\mathbf{s}=-\mathbf{i}_z$.

(d) *Propagatie in een medium waarvoor $\sigma=0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn*

Substitutie van $\gamma=\alpha+j\beta$ in (26.30) geeft voor het beschouwde medium

$$\alpha\cdot\alpha + 2j\alpha\cdot\beta - \beta\cdot\beta = -\omega^2\varepsilon\mu. \tag{26.84}$$

Hierin is het rechterlid reëel, zodat splitsing van de vergelijking in reëel en imaginair deel leidt tot

$$\alpha\cdot\alpha - \beta\cdot\beta = -\omega^2\varepsilon\mu \tag{26.85}$$

en

$$\alpha\cdot\beta = 0. \tag{26.86}$$

De vier gevallen die uit (26.86) kunnen voortkomen, staan in Tabel 15 vermeld. Van de uniforme vlakke golf heeft de amplitude overal dezelfde waarde, omdat de elektromagnetische eigenschappen van het medium

Tabel 15. Propagatie van een driedimensionale, vlakke golf in een medium waarvoor $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn

$\gamma = \alpha + j\beta$				*type golf*
$\alpha = 0$	en	$\beta = 0$		geen oplossing
$\alpha = 0$	en	$\beta = \beta s$	met $s \cdot s = 1$	uniforme vlakke golf
$\alpha \neq 0$	en	$\beta = 0$		geen oplossing
$\alpha \neq 0$	en	$\beta \neq 0$		niet-uniforme vlakke golf

in alle gevallen geldt $\alpha \cdot \alpha < \beta \cdot \beta$ en $\alpha \cdot \beta = 0$

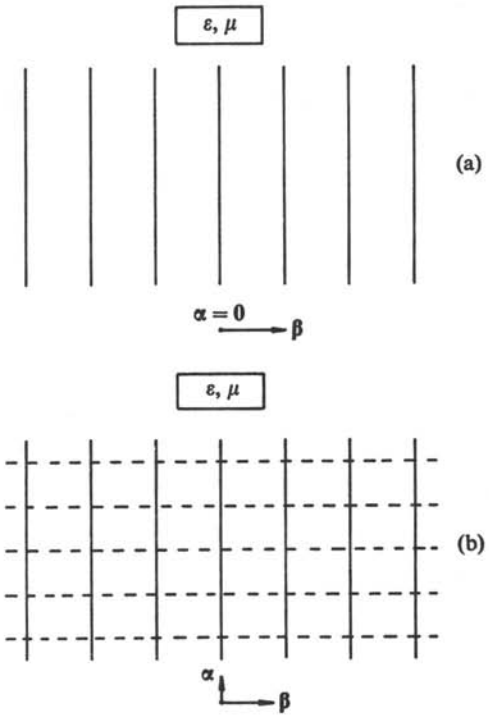


Fig. 59. Vlakken van gelijke amplitude (– – –) en vlakken van gelijke fase (———) van (a) een uniforme en (b) een niet-uniforme vlakke golf in een medium waarvoor $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn.

geen verzwakking veroorzaken (Fig. 59a). Van de niet-uniforme vlakke golf snijden de vlakken van gelijke amplitude en de vlakken van gelijke fase elkaar loodrecht (Fig. 59b).

(e) *Propagatie in een medium waarvoor* σ, ε *en* μ *reëel en positief zijn*

Substitutie van $\gamma = \alpha + j\beta$ in (26.30) geeft voor het beschouwde medium

$$\alpha \cdot \alpha + 2j\alpha \cdot \beta - \beta \cdot \beta = -\omega^2 \varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma . \tag{26.87}$$

Splitsen van deze vergelijking in reëel en imaginair deel leidt tot

$$\alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = -\omega^2 \varepsilon\mu \tag{26.88}$$

en

$$\alpha \cdot \beta = \omega\mu\sigma/2 . \tag{26.89}$$

De hieruit volgende resultaten voor uniforme en niet-uniforme vlakke golven staan in Tabel 16 vermeld. Van de uniforme vlakke golf zijn de vlakken van gelijke amplitude evenwijdig aan de vlakken van gelijke

Tabel 16. Propagatie van een driedimensionale, vlakke golf in een medium waarvoor σ, ε *en* μ *reëel en positief zijn*

$\gamma = \alpha + j\beta$	*type golf*
$\alpha = \alpha s$ en $\beta = \beta s$ met $s \cdot s = 1$	uniforme vlakke golf
$\alpha \times \beta \neq 0$	niet-uniforme vlakke golf
in alle gevallen geldt $\alpha \cdot \alpha < \beta \cdot \beta$ en $\alpha \cdot \beta > 0$	

fase (Fig. 60a). Van de niet-uniforme vlakke golf snijden de vlakken van gelijke amplitude en de vlakken van gelijke fase elkaar onder een hoek die zodanig is, dat de hoek tussen α en β kleiner is dan $\pi/2$ radiaal (Fig. 60b).

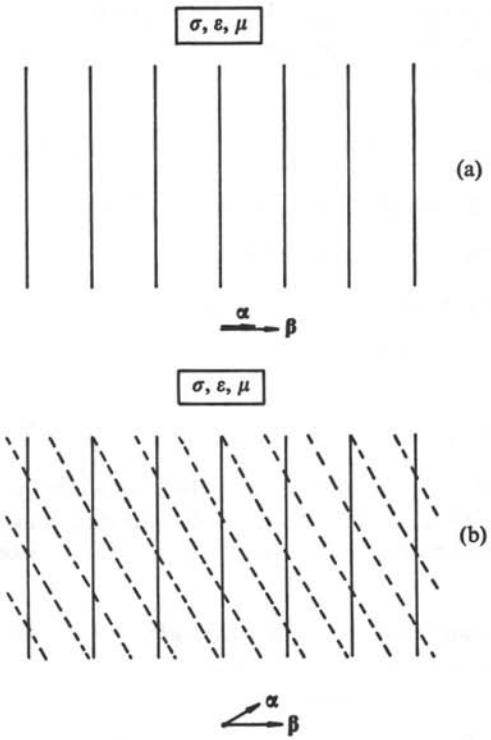


Fig. 60. Vlakken van gelijke amplitude (----) en vlakken van gelijke fase (——) van (a) een uniforme en (b) een niet-uniforme vlakke golf in een medium waarvoor σ, ε en μ reëel en positief zijn.

(f) *Propagatie in een botsingsvrij plasma, waarvoor* $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_p(\omega)$ *en* $\mu = \mu_0$

Hierin is $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\omega)$ gegeven door (zie (21.88))

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2), \tag{26.90}$$

waarin ω_p de plasmacirkelfrequentie voorstelt. Substitutie van $\gamma = \alpha + j\beta$ en van (26.90) in (26.30) geeft voor het beschouwde medium

$$\alpha\cdot\alpha + 2j\alpha\cdot\beta - \beta\cdot\beta = (\omega_p^2-\omega^2)\,\varepsilon_0\mu_0\,. \tag{26.91}$$

Hierin is het rechterlid reëel, zodat splitsing van de vergelijking in reëel en imaginair deel leidt tot

$$\alpha\cdot\alpha - \beta\cdot\beta = (\omega_p^2-\omega^2)\,\varepsilon_0\mu_0 \tag{26.92}$$

en

$$\alpha \cdot \beta = 0. \tag{26.93}$$

De vier gevallen die uit (26.93) kunnen voortkomen, staan in Tabel 17 vermeld; voor de typering van de golf dient men onderscheid te maken tussen de intervallen $0 < \omega < \omega_p$ en $\omega_p < \omega < \infty$. De uniforme vlakke golf in het interval $0 < \omega < \omega_p$ is overal gelijkfasig (Fig. 61a); van de uniforme vlakke golf in het interval $\omega_p < \omega < \infty$ heeft de amplitude overal dezelfde waarde (Fig. 61b). Van de niet-uniforme vlakke golven

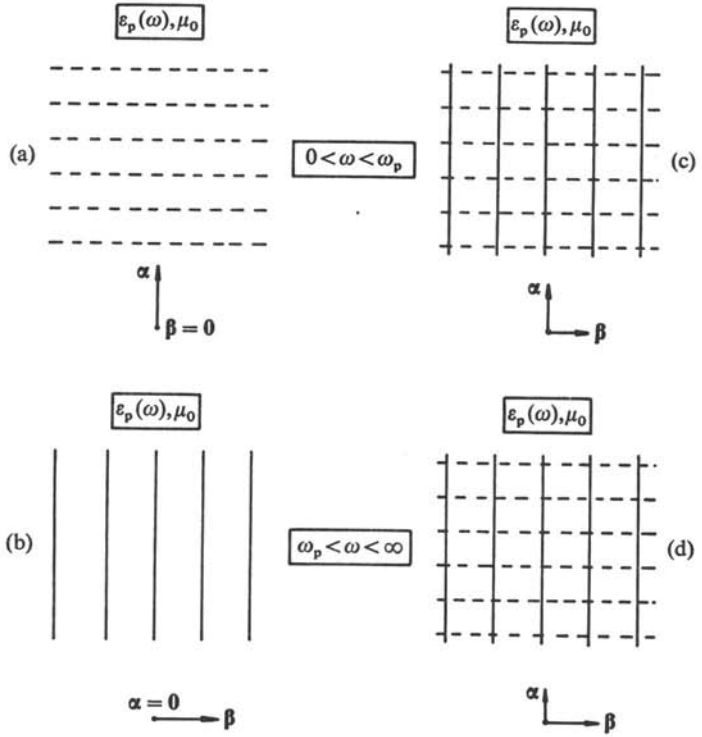


Fig. 61. Vlakken van gelijke amplitude (----) en vlakken van gelijke fase (——) van (a) een uniforme vlakke golf in het interval $0 < \omega < \omega_p$, *(b) een uniforme vlakke golf in het interval* $\omega_p < \omega < \infty$, *(c) een niet-uniforme vlakke golf in het interval* $0 < \omega < \omega_p$, *(d) een niet-uniforme vlakke golf in het interval* $\omega_p < \omega < \infty$, *in een botsingsvrij plasma met plasmacirkelfrequentie* ω_p.

snijden de vlakken van gelijke amplitude en de vlakken van gelijke fase elkaar loodrecht (Fig. 61c en d).

Tabel 17. Propagatie van een driedimensionale, vlakke golf in een botsingsvrij plasma met plasmacirkelfrequentie ω_p

$\gamma = \alpha + j\beta$				*type golf*	
				$0 < \omega < \omega_p$	$\omega_p < \omega < \infty$
$\alpha = 0$	en	$\beta = 0$		geen oplossing	geen oplossing
$\alpha = 0$	en	$\beta = \beta s$	met $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = 1$	geen oplossing	uniforme vlakke golf zonder verzwakking
$\alpha = \alpha s$	en	$\beta = 0$	met $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = 1$	uniforme vlakke golf met verzwakking en zonder fasedraaiing	geen oplossing
$\alpha \neq 0$	en	$\beta \neq 0$		niet-uniforme vlakke golf met $\beta\cdot\beta < \alpha\cdot\alpha$	niet-uniforme vlakke golf met $\alpha\cdot\alpha < \beta\cdot\beta$

in alle gevallen geldt $\alpha\cdot\beta = 0$

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 26.1. In een botsingsvrij plasma met plasmacirkelfrequentie ω_p is een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderende, vlakke, elektromagnetische golf aanwezig. De elektrische veldsterkte van de golf is lineair gepolariseerd en evenwijdig aan de y-as van een rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel. De fasevector van de golf is evenwijdig aan de x-as van dit stelsel en de verzwakkingsvector evenwijdig aan de z-as. Stel $\mathbf{E} = e_y \mathbf{i}_y \exp(-\alpha z - j\beta x)$ en $\mathbf{H} = \mathbf{h} \exp(-\alpha z - j\beta x)$ en bepaal (a) de betrekking die er tussen α en β bestaat, (b) de betrekkingen die er tussen e_y en de kentallen van $\mathbf{h}$ bestaan, (c) de uitdrukking voor de over een periode in de tijd gemiddelde waarde van de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom $\langle \mathbf{S} \rangle_T$.
Antwoord: (a) $\alpha^2 - \beta^2 = (\omega_p^2 - \omega^2)\varepsilon_0\mu_0$; (b) $h_x = -(\alpha/j\omega\mu_0)e_y$, $h_y = 0$, $h_z = (\beta/\omega\mu_0)e_y$; (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T = \frac{1}{2}(\beta/\omega\mu_0)|e_y|^2 \exp(-2\alpha z)\mathbf{i}_x$.

Vraagstuk 26.2. In een botsingsvrij plasma met plasmacirkelfrequentie ω_p is een sinusvormig met de tijd met cirkelfrequentie ω veranderende, vlakke, elektromagnetische golf aanwezig. De magnetische veldsterkte van de golf is lineair gepolariseerd en evenwijdig aan de y-as van een rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel. De fasevector van de golf is evenwijdig aan de x-as van dit stelsel en de verzwakkingsvector evenwijdig aan de z-as. Stel $\mathbf{E} = \mathbf{e} \exp(-\alpha z - j\beta x)$ en $\mathbf{H} = h_y \mathbf{i}_y \exp(-\alpha z - j\beta x)$ en bepaal (a) de betrekking die er tussen α en β bestaat, (b) de betrekkingen die er tussen h_y en de kentallen van $\mathbf{e}$ bestaan, (c) de uitdrukking voor de over een periode in de tijd gemiddelde waarde van de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom $\langle \mathbf{S} \rangle_T$.
Antwoord: (a) $\alpha^2 - \beta^2 = (\omega_p^2 - \omega^2)\varepsilon_0\mu_0$; (b) $e_x = (\alpha/j\omega\varepsilon_p)h_y$, $e_y = 0$, $e_z = -(\beta/\omega\varepsilon_p)h_y$; (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T = \frac{1}{2}(\beta/\omega\varepsilon_p)|h_y|^2 \exp(-2\alpha z)\mathbf{i}_x$. Hierin is $\varepsilon_p = \varepsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$.

27. Interferentie van twee vlakke, elektromagnetische golven met gelijke cirkelfrequenties

Wanneer in een bepaald gebied in een lineair medium twee of meer golven tegelijkertijd aanwezig zijn, is de totale waarde van een bepaalde veldgrootheid in een bepaald punt en op een bepaald tijdstip gelijk aan de som van de bijdragen van de afzonderlijke golven (beginsel van de superpositie). Ook als de samenstellende golven van een eenvoudige structuur zijn, kan het resulterende veld op tamelijk gecompliceerde wijze van de plaats en van de tijd afhangen. Dit verschijnsel noemt men *interferentie* en het op een of andere wijze gedefinieerde patroon dat ontstaat, heet een *interferentiepatroon*. (Zo kan voor een samenstel van lichtgolven een interferentiepatroon bestaan uit de plaatsafhankelijke zwarting van een fotografische plaat.)

In deze paragraaf bestuderen wij de interferentie van twee vlakke, elektromagnetische golven die beide sinusvormig met de tijd veranderen met dezelfde cirkelfrequentie ω. Voor lichtgolven betekent dit, dat zij monochromatisch zijn. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; als complexe tijdfactor gebruiken wij $\exp(j\omega t)$. Daar het ontstaan van een interferentiepatroon onder andere te maken heeft met het in een bepaald punt optreden van een vast verschil in fase tussen de samenstellende golven, moet deze fase een deterministische grootheid zijn. Dit betekent, dat de golven afkomstig moeten zijn van één bron die in de tijd cohaerent is of van verschillende bronnen die in de tijd cohaerent zijn. (Voor een bespreking van het begrip cohaerentie verwijzen wij naar de literatuur, zie bijvoorbeeld PEŘINA[32]).

Verder onderstellen wij, dat de beide golven aanwezig zijn in een homogeen gebied van een medium met constitutieve coëfficiënten σ, ε en μ. De ene golf duiden wij aan als Golf 1; zijn elektrische en magnetische

* Het teken $\hat{}$ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

32. PEŘINA, J., *Coherence of light*, London, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

veldsterkte zijn gegeven door

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 \exp(-\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{r}) \tag{27.1}$$

en

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{h}_1 \exp(-\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{r}). \tag{27.2}$$

De andere golf duiden wij aan als Golf 2; zijn elektrische en magnetische veldsterkte zijn gegeven door

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 \exp(-\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r}) \tag{27.3}$$

en

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{h}_2 \exp(-\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \mathbf{r}). \tag{27.4}$$

Tussen $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{h}_1$, evenals tussen $\boldsymbol{\gamma}_2$, $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{h}_2$, bestaan betrekkingen zoals in Par. 26 zijn besproken. Daar beide golven in hetzelfde medium aanwezig zijn, geldt in het bijzonder

$$\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, j\omega\mu. \tag{27.5}$$

In het gebied waar interferentie optreedt, is de totale elektrische veldsterkte gegeven door

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \tag{27.6}$$

en de totale magnetische veldsterkte door

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2. \tag{27.7}$$

Een inzicht in de structuur van $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ wordt verkregen door in de uitdrukkingen die ontstaan als (27.1) en (27.3) in het rechterlid van (27.6), alsmede (27.2) en (27.4) in het rechterlid van (27.7) worden gesubstitueerd, de som en het verschil van de voortplantingsvectoren $\boldsymbol{\gamma}_1$ en $\boldsymbol{\gamma}_2$ in te voeren. Daartoe schrijven wij

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2) + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2) \tag{27.8}$$

en

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2) - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2). \tag{27.9}$$

De resulterende uitdrukkingen voor $\mathbf{E}$ en $\mathbf{H}$ zijn

$$\mathbf{E} = \exp[-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2) \cdot \mathbf{r}] \{\mathbf{e}_1 \exp[-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2) \cdot \mathbf{r}] + \mathbf{e}_2 \exp[\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma}_1 - \boldsymbol{\gamma}_2) \cdot \mathbf{r}]\} \tag{27.10}$$

en

$$\mathbf{H} = \exp[-\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\,\{\mathbf{h}_1 \exp[-\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}] + \mathbf{h}_2 \exp[\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\}. \tag{27.11}$$

De exponentiële functie buiten de accoladen in de rechterleden van (27.10) en (27.11) stelt de voortplantingsfactor voor van een lopende, vlakke golf met voortplantingsvector $\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$. De uitdrukkingen tussen de accoladen stellen een staande golf voor, die ontstaat uit de superpositie van een lopende, vlakke golf met voortplantingsvector $\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)$ en een lopende, vlakke golf met voortplantingsvector $-\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)$. Met behulp van de betrekkingen

$$\exp(-\gamma\cdot\mathbf{r}) = \cosh(\gamma\cdot\mathbf{r}) - \sinh(\gamma\cdot\mathbf{r}) \tag{27.12}$$

en

$$\exp(\gamma\cdot\mathbf{r}) = \cosh(\gamma\cdot\mathbf{r}) + \sinh(\gamma\cdot\mathbf{r}) \tag{27.13}$$

zijn (27.10) en (27.11) te herschrijven als

$$\mathbf{E} = \exp[-\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\,\{(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\cosh[\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}] - (\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\sinh[\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\} \tag{27.14}$$

en

$$\mathbf{H} = \exp[-\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\,\{(\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2)\cosh[\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}] - (\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2)\sinh[\tfrac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)\cdot\mathbf{r}]\}. \tag{27.15}$$

In het tot nu toe beschouwde, meest algemene geval zijn de uitdrukkingen voor **E** en/of **H** niet verder te vereenvoudigen. Enkele bijzondere gevallen waarin dit wel lukt, zullen hieronder worden besproken. In deze gevallen zal de oriëntatie van het gebruikte rechts-cyclische, Cartesiaanse coördinatenstelsel aan de bijzondere situatie worden aangepast.

(a) *Lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte (uniforme vlakke golven)*

Onderstel, dat $\mathbf{E}_1$ en $\mathbf{E}_2$ lineair gepolariseerd zijn en wel in dezelfde richting. Dan zijn ook $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ lineair gepolariseerd in deze richting. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij nu de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle elektrische veldsterkten die een rol spelen. Dan is

$$\mathbf{e}_1 = e_{1,y}\mathbf{i}_y \quad \text{en} \quad \mathbf{e}_2 = e_{2,y}\mathbf{i}_y. \tag{27.16}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (a) behandelde theorie hebben dan

γ_1 en $\mathbf{h}_1$, alsmede γ_2 en $\mathbf{h}_2$ alleen een x- en een z-component. Voor uniforme vlakke golven geldt bovendien (zie (26.69) en (26.72))

$$\gamma_1 = \gamma \mathbf{s}_1 \tag{27.17}$$

en

$$\gamma_2 = \gamma \mathbf{s}_2, \tag{27.18}$$

waarin $\mathbf{s}_1$ de eenheidsvector is in de voortplantingsrichting van Golf 1 en $\mathbf{s}_2$ de eenheidsvector in de voortplantingsrichting van Golf 2, zodat

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = 1, \tag{27.19}$$

en

$$\gamma = [(\sigma + j\omega\varepsilon)\, j\omega\mu]^{\frac{1}{2}}. \tag{27.20}$$

Omtrent de keuze van de vierkantswortel in het rechterlid van (27.20) worden dezelfde afspraken gemaakt als in Par. 21. De eenheidsvectoren $\mathbf{s}_1$ en $\mathbf{s}_2$ zijn gelegen in het x,z-vlak. Vervolgens kiezen wij de positieve x-as langs $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ en de positieve z-as langs $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Laat θ de hoek zijn die $\mathbf{s}_1$ met $\mathbf{i}_z$ maakt en $\pi/2 - \theta$ de hoek die $\mathbf{s}_1$ met $\mathbf{i}_x$ maakt (zie Fig. 62 op blz. 278). Dan is

$$\mathbf{s}_1 = \sin(\theta)\, \mathbf{i}_x + \cos(\theta)\, \mathbf{i}_z \tag{27.21}$$

en

$$\mathbf{s}_2 = -\sin(\theta)\, \mathbf{i}_x + \cos(\theta)\, \mathbf{i}_z, \tag{27.22}$$

zodat

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma \cos(\theta)\, \mathbf{i}_z \tag{27.23}$$

en

$$\tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) = \gamma \sin(\theta)\, \mathbf{i}_x. \tag{27.24}$$

Substitutie van (27.23) en (27.24) in (27.10) en (27.11) geeft

$$\mathbf{E} = \exp[-\gamma \cos(\theta)\, z]\, \{e_{1,y} \exp[-\gamma \sin(\theta)\, x] + e_{2,y} \exp[\gamma \sin(\theta)\, x]\}\, \mathbf{i}_y \tag{27.25}$$

en

$$\mathbf{H} = \exp[-\gamma \cos(\theta)\, z]\, \{\mathbf{h}_1 \exp[-\gamma \sin(\theta)\, x] + \mathbf{h}_2 \exp[\gamma \sin(\theta)\, x]\}, \tag{27.26}$$

waarin (zie (26.43) en (26.47))

$$\mathbf{h}_1 = Y\mathbf{s}_1 \times (e_{1,y}\mathbf{i}_y) \tag{27.27}$$

en

$$\mathbf{h}_2 = Y\mathbf{s}_2 \times (e_{2,y}\mathbf{i}_y), \tag{27.28}$$

met

$$Y = \gamma/j\omega\mu. \tag{27.29}$$

Met het oog op de hieronder te bespreken toepassing dienen wij te beschikken over de uitdrukking voor de over een periode (in de tijd) gemiddelde waarde van de oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom. Deze is gegeven door

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \tag{27.30}$$

Substitutie van (27.25) en (27.26) in het rechterlid van (27.30) leidt tot een resultaat dat op gecompliceerde wijze van de plaatscoördinaten x en z afhangt. Het resultaat wordt veel overzichtelijker indien wij onderstellen, dat voor het beschouwde medium geldt $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn. Voor de bedoelde toepassing is dit geen wezenlijke beperking, zodat wij verder gaan met dit geval. Dan is

$$\gamma = j\beta \qquad \text{met} \qquad \beta = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{27.31}$$

en

$$Y = (\varepsilon/\mu)^{\frac{1}{2}}, \tag{27.32}$$

waarin β en Y reëel en positief zijn. Tevens kiezen wij de oorsprong van het coördinatenstelsel — de keuze hiervan stond nog vrij — zodanig, dat $e_{1,y}$ en $e_{2,y}$ in fase zijn; dan is $e_{1,y}e^*_{2,y} = e^*_{1,y}\, e_{2,y}$ reëel en positief. Substitutie van (27.25) en (27.26) in het rechterlid van (27.30) leidt nu, met gebruikmaking van (27.31) en (27.32) tot

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = \langle S_x \rangle_T \mathbf{i}_x + \langle S_z \rangle_T \mathbf{i}_z, \tag{27.33}$$

waarin

$$\langle S_x \rangle_T = \tfrac{1}{2}(\varepsilon/\mu)^{\frac{1}{2}} \{|e_{1,y}|^2 - |e_{2,y}|^2\} \sin(\theta) \tag{27.34}$$

en

$$\langle S_z \rangle_T = \tfrac{1}{2}(\varepsilon/\mu)^{\frac{1}{2}} \{|e_{1,y}|^2 + |e_{2,y}|^2 + 2e_{1,y}e^*_{2,y} \cos[2\beta \sin(\theta)\, x]\} \cos(\theta). \tag{27.35}$$

Uit de verkregen resultaten blijkt, dat $\langle S_x \rangle_T$ niet met de plaats verandert

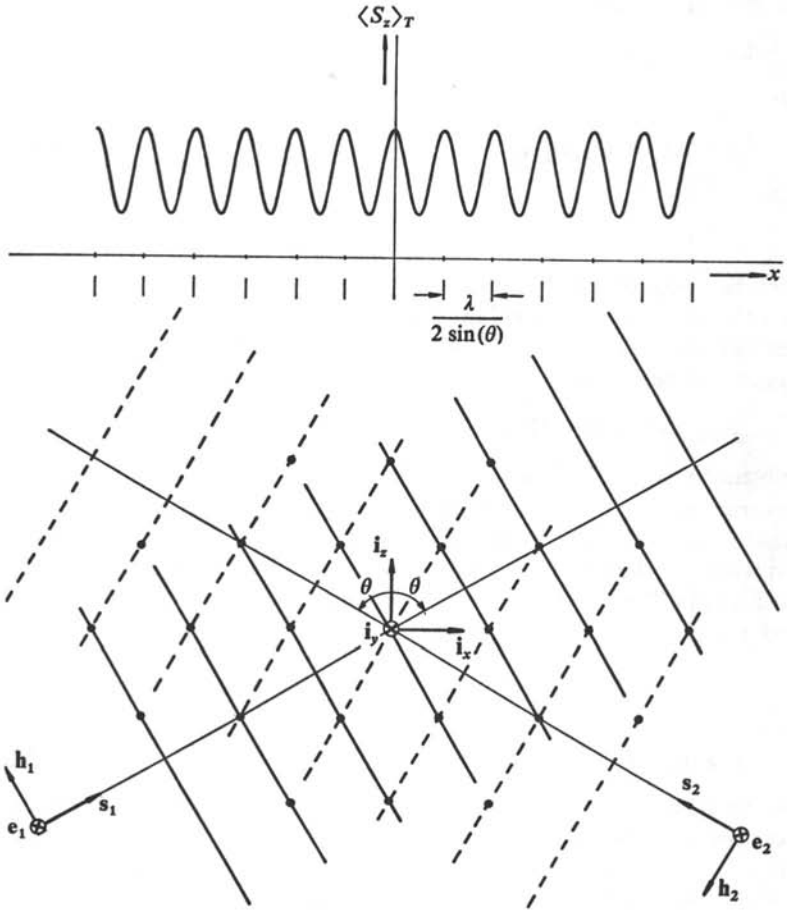


Fig. 62. Het verloop van $\langle S_z \rangle_T$ als functie van x bij interferentie van twee uniforme vlakke golven ($\mathbf{s}_1 = \sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$, $\mathbf{s}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$), waarvan de elektrische veldsterkten lineair gepolariseerd en onderling evenwijdig zijn.

en dat $\langle S_z \rangle_T$ een periodieke functie van x is. De periode van $\langle S_z \rangle_T$ in de x-richting bedraagt

$$\lambda_x = \lambda / 2 \sin(\theta), \tag{27.36}$$

waarin $\lambda = 2\pi/\beta$ de golflengte van de uniforme vlakke golven in het

beschouwde medium voorstelt. De maxima en minima van $\langle S_z \rangle_T$ zijn weergegeven in Tabel 18. Het verloop van $\langle S_z \rangle_T$ als functie van x is weergegeven in Fig. 62.

Tabel 18. Maxima en minima van $\langle S_z \rangle_T$ bij interferentie van twee uniforme vlakke golven ($\mathbf{s}_1 = \sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$, $\mathbf{s}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$; lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte)

plaats	*soort extreem*	$\langle S_z \rangle_T$
$x = m\lambda/2\sin(\theta)$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	maximum	$\frac{1}{2} Y \lvert e_{1,y} + e_{2,y}^* \rvert^2 \cos(\theta)$
$x = (m + \frac{1}{2})\lambda/2\sin(\theta)$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	minimum	$\frac{1}{2} Y \lvert e_{1,y} - e_{2,y}^* \rvert^2 \cos(\theta)$

$e_{1,y}$ en $e_{2,y}$ zijn in fase, dus $e_{1,y} e_{2,y}^*$ is reëel en positief

(b) *Lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte (uniforme vlakke golven)*

De behandeling van dit geval verloopt geheel analoog met die van het onder (a) besproken geval van een lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte. Onderstel, dat $\mathbf{H}_1$ en $\mathbf{H}_2$ lineair gepolariseerd zijn en wel in dezelfde richting. Dan zijn ook $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, $\mathbf{h}_1$ en $\mathbf{h}_2$ lineair gepolariseerd in deze richting. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle magnetische veldsterkten die een rol spelen. Dan is

$$\mathbf{h}_1 = h_{1,y}\,\mathbf{i}_y \qquad \text{en} \qquad \mathbf{h}_2 = h_{2,y}\,\mathbf{i}_y. \tag{27.37}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (b) behandelde theorie hebben dan γ_1 en $\mathbf{e}_1$, alsmede γ_2 en $\mathbf{e}_2$ alleen een x- en een z-component. Voor uniforme vlakke golven gelden bovendien de betrekkingen (27.17) tot en met (27.20). Wederom kiezen wij de positieve x-as langs $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ en de positieve z-as langs $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ en maken gebruik van de hoek θ die onder (a) is ingevoerd (zie Fig. 63 op blz. 280). Substitutie van (27.23) en (27.24) in (27.10) en (27.11) geeft dan

$$\mathbf{E} = \exp[-\gamma \cos(\theta)\, z]\,\{\mathbf{e}_1 \exp[-\gamma \sin(\theta)\, x] + \mathbf{e}_2 \exp[\gamma \sin(\theta)\, x]\} \tag{27.38}$$

en

$$\mathbf{H} = \exp[-\gamma \cos(\theta)\, z]\, \{h_{1,y} \exp[-\gamma \sin(\theta)\, x] + h_{2,y} \exp[\gamma \sin(\theta)\, x]\}\, \mathbf{i}_y, \tag{27.39}$$

waarin (zie (26.44) en (26.46))

$$\mathbf{e}_1 = h_{1,y}\mathbf{i}_y \times Z\mathbf{s}_1 \tag{27.40}$$

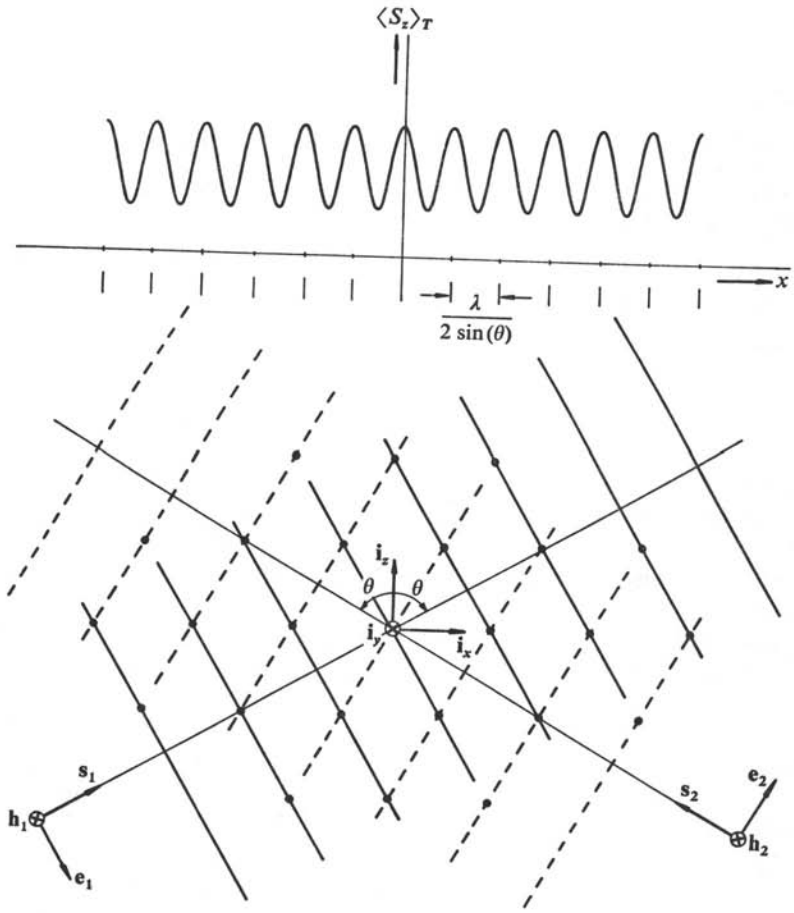


Fig. 63. Het verloop van $\langle S_z \rangle_T$ als functie van x bij interferentie van twee uniforme vlakke golven ($\mathbf{s}_1 = \sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$, $\mathbf{s}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$), waarvan de magnetische veldsterkten lineair gepolariseerd en onderling evenwijdig zijn.

en

$$\mathbf{e}_2 = h_{2,y}\mathbf{i}_y \times Z\mathbf{s}_2, \tag{27.41}$$

met

$$Z = \gamma/(\sigma + j\omega\varepsilon). \tag{27.42}$$

Evenals onder (a) bepalen wij nu de grootheid $\langle \mathbf{S} \rangle_T$ in de onderstelling, dat voor het beschouwde medium geldt $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn. Dan is

$$\gamma = j\beta \qquad \text{met} \qquad \beta = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} \tag{27.43}$$

en

$$Z = (\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \tag{27.44}$$

Tevens kiezen wij de oorsprong van het coördinatenstelsel zodanig, dat $h_{1,y}$ en $h_{2,y}$ in fase zijn; dan is $h_{1,y}h^*_{2,y} = h^*_{1,y}h_{2,y}$ reëel en positief. Substitutie van (27.38) en (27.39) in het rechterlid van (27.30) leidt nu, met gebruikmaking van (27.43) en (27.44) tot

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = \langle S_x \rangle_T \mathbf{i}_x + \langle S_z \rangle_T \mathbf{i}_z, \tag{27.45}$$

waarin

$$\langle S_x \rangle_T = \tfrac{1}{2}(\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \{|h_{1,y}|^2 - |h_{2,y}|^2\} \sin(\theta) \tag{27.46}$$

en

$$\langle S_z \rangle_T = \tfrac{1}{2}(\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \{|h_{1,y}|^2 + |h_{2,y}|^2 + 2h_{1,y}h^*_{2,y} \cos[2\beta \sin(\theta)\, x]\} \cos(\theta). \tag{27.47}$$

Tabel 19. Maxima en minima van $\langle S_z \rangle_T$ bij interferentie van twee uniforme vlakke golven ($\mathbf{s}_1 = \sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$, $\mathbf{s}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{i}_x + \cos(\theta)\mathbf{i}_z$; lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte)

plaats	*soort extreem*	$\langle S_z \rangle_T$
$x = m\lambda/2 \sin(\theta)$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	maximum	$\frac{1}{2}Z\lvert h_{1,y} + h^*_{2,y}\rvert^2 \cos(\theta)$
$x = (m + \frac{1}{2})\lambda/2 \sin(\theta)$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	minimum	$\frac{1}{2}Z\lvert h_{1,y} - h^*_{2,y}\rvert^2 \cos(\theta)$

$h_{1,y}$ en $h_{2,y}$ zijn in fase, dus $h_{1,y}h^*_{2,y}$ is reëel en positief

Uit de verkregen resultaten blijkt, dat ook in dit geval $\langle S_x \rangle_T$ niet met de plaats verandert en dat $\langle S_z \rangle_T$ een periodieke functie van x met de periode $\lambda_x = \lambda/2 \sin(\theta)$ is. De maxima en minima van $\langle S_z \rangle_T$ zijn weergegeven in Tabel 19. Het verloop van $\langle S_z \rangle_T$ als functie van x is weergegeven in Fig. 63.

De eigenschappen van het elektromagnetische veld dat door interferentie van twee uniforme vlakke golven ontstaat, worden onder andere gebruikt voor de vervaardiging van een fotografische plaat met periodieke zwarting (ook wel interferentietralie of holografisch tralie genoemd). Daartoe worden twee cohaerente bundels licht van de onder (a) of (b) besproken polarisatietoestand tot interferentie gebracht; de bundels worden doorgaans opgewekt met behulp van een laser. In het gebied waar interferentie optreedt, wordt evenwijdig aan het x,y-vlak een vlakke fotografische plaat aangebracht en belicht (Fig. 64). Het elektromagnetische veld transporteert dan elektromagnetische energie — dus fotonen — naar de fotografische plaat toe. De oppervlaktedichtheid van deze vermogensstroom $\langle S_z \rangle_T$ is gegeven door (27.35) dan wel door (27.47) en is een periodieke functie van x met periode $\lambda_x = \lambda/2 \sin(\theta)$. Na fotografische behandeling resulteert de belichting in een zwarting die periodiek is in de x-richting, eveneens met periode $\lambda_x = \lambda/2 \sin(\theta)$. Een plaat met een zodanig patroon kan als onderdeel dienen in een aantal optische meetopstellingen; hierop gaan wij niet verder in.

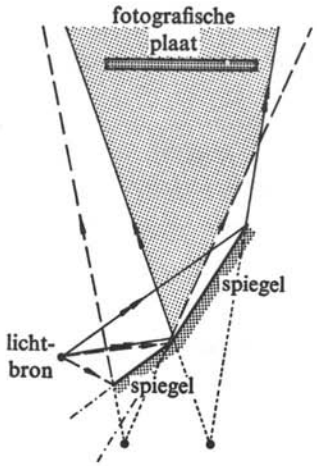


Fig. 64. Opstelling voor de vervaardiging van een fotografische plaat met periodieke zwarting.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 27.1. Welke waarde moet de in Fig. 62 en Fig. 63 aangegeven hoek θ hebben om met behulp van een helium-neonlaser die elektromagnetische straling met een golflengte in vacuüm $\lambda = 632.8$ nm opwekt, een fotografische plaat met periodieke zwarting te maken met periode $\lambda_x = 0.5$ μm (= „2000 lijnen per millimeter")? Onderstel hierbij, dat voor het fotografische materiaal en voor het omringde medium geldt $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ en $\mu = \mu_0$.
Antwoord: $\theta = 39.26$ deg.

28. Betrekkingen tussen de componenten van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf bij gebruik van een coördinatenstelsel dat aan de configuratie is aangepast

Bij het uitvoeren van berekeningen aan golfverschijnselen in een bepaalde configuratie is het vaak voordelig een coördinatenstelsel te gebruiken dat aan de geometrie van de configuratie is aangepast. Het invoeren van een bepaald coördinatenstelsel — merk op, dat dit bijvoorbeeld in Par. 26 niet is gebeurd — heeft echter tot gevolg, dat de vectoriële grootheden die in de beschrijving van het golfverschijnsel een rol spelen, ook bij voorkeur ontbonden moeten worden in hun componenten langs de assen van dit stelsel. Deze ontbinding leidt echter op haar beurt weer tot betrekkingen tussen de componenten van de genoemde vectoriële grootheden en wel tot betrekkingen die dan gebonden zijn aan het gebruikte coördinatenstelsel.

In deze paragraaf behandelen wij een van de eenvoudigste voorbeelden in dit verband. Wij voeren een Cartesiaans coördinatenstelsel in waarvan één as, de z-as, een richting heeft die wordt voorgeschreven door de geometrie van de configuratie. In dit coördinatenstelsel zullen wij de vectoriële grootheden die een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf beschrijven (zie Par. 26), ontbinden in een component evenwijdig aan de z-richting en een component evenwijdig aan het x,y-vlak. De component van een vectoriële grootheid die evenwijdig is aan de z-richting zullen wij aanduiden als haar z-component, de component die evenwijdig is aan het x,y-vlak zullen wij aanduiden als haar transversale component. De transversale component van een vector zal worden aangegeven met het onderschrift ‚T'. De verkregen resultaten zijn onder andere van belang voor het in Par. 29 te behandelen vraagstuk van de reflectie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp en het in Par. 30 aan de orde te stellen vraagstuk van de reflectie en de transmissie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf door het platte scheidingsvlak van twee media.

Evenals in Par. 21 beschouwen wij een uniforme sectie van het medium, kiezen de onderling evenwijdige grensvlakken van de sectie als referentie-

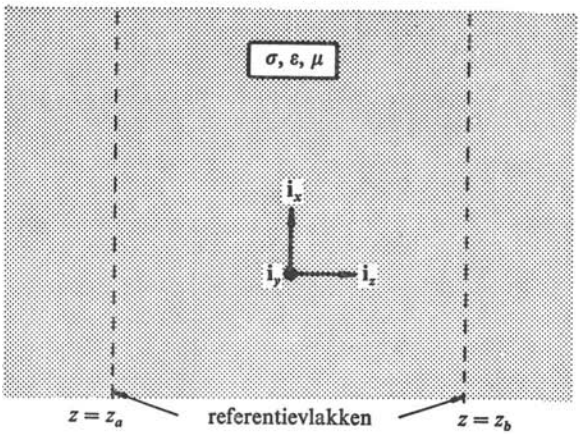


Fig. 65. Uniforme sectie van een medium met referentievlakken $z = z_a$ en $z = z_b$ ($z_a < z_b$).

vlakken en oriënteren het gebruikte rechts-cyclische Cartesiaanse coördinatenstelsel zodanig, dat de z-as loodrecht op de referentievlakken staat. De laatste bevinden zich bij $z = z_a$ en $z = z_b$ met $z_a < z_b$. De beschouwde uniforme sectie neemt dan het gebied $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $z_a < z < z_b$ in beslag (Fig. 65). De elektromagnetische eigenschappen van het in de sectie aanwezige medium worden beschreven door de constitutieve vergelijkingen (26.6) t/m (26.8). In de sectie is een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf aanwezig met complexe voortplantingsvector $\boldsymbol{\gamma} = \alpha + j\beta$. Hierin zijn α en β willekeurig

Tabel 20. Transversale en z-componenten van de vectoriële grootheden die een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf karakteriseren

vectoriële grootheid	*transversale component*	*z-component*
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_T + z\mathbf{i}_z$	$\mathbf{r}_T = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y$	$z\mathbf{i}_z$
$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_T + \gamma_z\mathbf{i}_z$	$\boldsymbol{\gamma}_T = \gamma_x\mathbf{i}_x + \gamma_y\mathbf{i}_y$	$\gamma_z\mathbf{i}_z$
$\mathbf{e} = \mathbf{e}_T + e_z\mathbf{i}_z$	$\mathbf{e}_T = e_x\mathbf{i}_x + e_y\mathbf{i}_y$	$e_z\mathbf{i}_z$
$\mathbf{h} = \mathbf{h}_T + h_z\mathbf{i}_z$	$\mathbf{h}_T = h_x\mathbf{i}_x + h_y\mathbf{i}_y$	$h_z\mathbf{i}_z$
$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + E_z\mathbf{i}_z$	$\mathbf{E}_T = E_x\mathbf{i}_x + E_y\mathbf{i}_y$	$E_z\mathbf{i}_z$
$\mathbf{H} = \mathbf{H}_T + H_z\mathbf{i}_z$	$\mathbf{H}_T = H_x\mathbf{i}_x + H_y\mathbf{i}_y$	$H_z\mathbf{i}_z$

georiënteerd ten opzichte van het gekozen coördinatenstelsel. De elektrische en de magnetische veldsterkte van de golf zijn gegeven door (zie (26.20) en (26.21))

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \exp(-\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) \tag{28.1}$$

en

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} \exp(-\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}). \tag{28.2}$$

De transversale en de z-componenten van de in (28.1) en (28.2) optredende grootheden zijn weergegeven in Tabel 20.

Uitvoeren van de in Tabel 20 aangegeven splitsing in (28.1) en (28.2) leidt tot

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{e}_T \exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T - \gamma_z z) \quad \text{en} \quad E_z = e_z \exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T - \gamma_z z), \tag{28.3}$$

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{h}_T \exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T - \gamma_z z) \quad \text{en} \quad H_z = h_z \exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T - \gamma_z z), \tag{28.4}$$

waarin

$$\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T = \gamma_x x + \gamma_y y. \tag{28.5}$$

Vervolgens voeren wij de splitsing uit in (26.23) en maken gebruik van de eigenschap

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{h} &= (\boldsymbol{\gamma}_T + \gamma_z \mathbf{i}_z) \times (\mathbf{h}_T + h_z \mathbf{i}_z) \\ &= \boldsymbol{\gamma}_T \times \mathbf{h}_T + \gamma_z \mathbf{i}_z \times \mathbf{h}_T + \boldsymbol{\gamma}_T \times h_z \mathbf{i}_z, \end{aligned} \tag{28.6}$$

daar $\mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_z = \mathbf{0}$. De eerste term in het rechterlid heeft alleen een z-component; de tweede en de derde term in het rechterlid hebben alleen een transversale component. Substitutie van (28.6) in (26.23) leidt tot

$$-\boldsymbol{\gamma}_T \times \mathbf{h}_T = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, e_z \mathbf{i}_z \tag{28.7}$$

en

$$-(\gamma_z \mathbf{i}_z \times \mathbf{h}_T + \boldsymbol{\gamma}_T \times h_z \mathbf{i}_z) = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, \mathbf{e}_T. \tag{28.8}$$

Evenzo leidt (26.24) tot

$$-\boldsymbol{\gamma}_T \times \mathbf{e}_T = -j\omega\mu h_z \mathbf{i}_z \tag{28.9}$$

en

$$-(\gamma_z \mathbf{i}_z \times \mathbf{e}_T + \boldsymbol{\gamma}_T \times e_z \mathbf{i}_z) = -j\omega\mu \mathbf{h}_T. \tag{28.10}$$

Tenslotte voeren wij de splitsing uit in (26.25) en maken gebruik van de eigenschap

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = (\boldsymbol{\gamma}_T + \gamma_z \mathbf{i}_z) \cdot (\mathbf{e}_T + e_z \mathbf{i}_z) = \boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{e}_T + \gamma_z e_z, \tag{28.11}$$

daar $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{e}_T = 0$, $\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{i}_z = 0$ en $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z = 1$. Substitutie van (28.11) in (26.25) leidt tot

$$\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{e}_T + \gamma_z e_z = 0. \tag{28.12}$$

Evenzo leidt (26.26) tot

$$\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{h}_T + \gamma_z h_z = 0. \tag{28.13}$$

De hierboven afgeleide formules zullen wij vervolgens gebruiken om de betrekkingen tussen de transversale en de z-componenten volgens bepaalde gezichtspunten te rangschikken.

In de eerste plaats leiden wij betrekkingen af waarin $\mathbf{e}_T$ en $\mathbf{h}_T$ worden uitgedrukt in e_z en h_z. Daartoe beschouwen wij

$$\boldsymbol{\gamma}_T \times (\boldsymbol{\gamma}_T \times \mathbf{e}_T) = (\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{e}_T)\, \boldsymbol{\gamma}_T - (\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T)\, \mathbf{e}_T \tag{28.14}$$

en maken hierin gebruik van (28.9) en (28.12). Het resultaat is

$$(\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T)\, \mathbf{e}_T = -(\gamma_z e_z)\, \boldsymbol{\gamma}_T + j\omega\mu h_z (\mathbf{i}_z \times \boldsymbol{\gamma}_T). \tag{28.15}$$

Op soortgelijke wijze volgt uit (28.7) en (28.13)

$$(\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T)\, \mathbf{h}_T = -(\gamma_z h_z)\, \boldsymbol{\gamma}_T - (\sigma + j\omega\varepsilon)\, e_z (\mathbf{i}_z \times \boldsymbol{\gamma}_T). \tag{28.16}$$

Als $\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 \neq 0$, drukt (28.15) $\mathbf{e}_T$ uit in e_z en h_z en (28.16) $\mathbf{h}_T$ in e_z en h_z. Als $\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T = 0$, is het rechterlid van (28.15) en (28.16) gelijk aan de nulvector en valt uit deze vergelijkingen verder niets af te leiden. (Merk op, dat uit $\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T = 0$ niet volgt, dat $\boldsymbol{\gamma}_T = \mathbf{0}$, omdat $\boldsymbol{\gamma}_T$ een complexe vector is.)

In de tweede plaats leiden wij betrekkingen af waarin $\mathbf{h}_T$ in $\mathbf{e}_T$, dan wel $\mathbf{e}_T$ in $\mathbf{h}_T$ wordt uitgedrukt. Daartoe substitueren wij de uit (28.12) volgende uitdrukking voor e_z in (28.10) en verkrijgen na enige herleiding

$$\mathbf{h}_T = \mathbf{i}_z \times \left[\frac{\gamma_z}{j\omega\mu}\, \mathbf{e}_T + \frac{1}{j\omega\mu\gamma_z}\, (\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{e}_T)\, \boldsymbol{\gamma}_T \right]. \tag{28.17}$$

Op soortgelijke wijze volgt uit (28.8) en (28.13)

$$\mathbf{e}_T = \left[\frac{\gamma_z}{\sigma + j\omega\varepsilon}\, \mathbf{h}_T + \frac{1}{(\sigma + j\omega\varepsilon)\, \gamma_z}\, (\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{h}_T)\, \boldsymbol{\gamma}_T \right] \times \mathbf{i}_z. \tag{28.18}$$

Vergelijking (28.17) drukt $\mathbf{h}_T$ uit in $\mathbf{e}_T$ en Vergelijking (28.18) $\mathbf{e}_T$ in $\mathbf{h}_T$.

Tot slot merken wij op, dat e_z wordt uitgedrukt in $\mathbf{h}_T$ via (28.7) en h_z in $\mathbf{e}_T$ via (28.9).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 28.1. Schrijf Vergelijking (28.7) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $-\gamma_x h_y+\gamma_y h_x=(\sigma+j\omega\varepsilon)e_z$.

Vraagstuk 28.2. Schrijf Vergelijking (28.8) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $-\gamma_y h_z+\gamma_z h_y=(\sigma+j\omega\varepsilon)e_x$, $-\gamma_z h_x+\gamma_x h_z=(\sigma+j\omega\varepsilon)e_y$.

Vraagstuk 28.3. Schrijf Vergelijking (28.9) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $-\gamma_x e_y+\gamma_y e_x=-j\omega\mu h_z$.

Vraagstuk 28.4. Schrijf Vergelijking (28.10) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $-\gamma_y e_z+\gamma_z e_y=-j\omega\mu h_x$, $-\gamma_z e_x+\gamma_x e_z=-j\omega\mu h_y$.

Vraagstuk 28.5. Schrijf Vergelijking (28.12) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $\gamma_x e_x+\gamma_y e_y+\gamma_z e_z=0$.

Vraagstuk 28.6. Schrijf Vergelijking (28.13) uit in Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $\gamma_x h_x+\gamma_y h_y+\gamma_z h_z=0$.

Vraagstuk 28.7. Wat volgt er uit de vergelijking $\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\boldsymbol{\gamma}_T=0$ als hierin de volgende splitsing in reëel en imaginair deel wordt gesubstitueerd $\boldsymbol{\gamma}_T=\boldsymbol{\alpha}_T+j\boldsymbol{\beta}_T$?
Antwoord: $\boldsymbol{\alpha}_T\cdot\boldsymbol{\alpha}_T-\boldsymbol{\beta}_T\cdot\boldsymbol{\beta}_T=0$ en $\boldsymbol{\alpha}_T\cdot\boldsymbol{\beta}_T=0$. (Merk op, dat het antwoord twee mogelijkheden openlaat: (a) $\boldsymbol{\alpha}_T=\mathbf{0}$ en $\boldsymbol{\beta}_T=\mathbf{0}$; (b) $\boldsymbol{\alpha}_T\neq\mathbf{0}$ en $\boldsymbol{\beta}_T\neq\mathbf{0}$, met $\boldsymbol{\alpha}_T\perp\boldsymbol{\beta}_T$ en $|\boldsymbol{\alpha}_T|=|\boldsymbol{\beta}_T|$.)

Vraagstuk 28.8. Wat volgt er uit de vergelijking $\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\boldsymbol{\gamma}_T=0$ als hierin de volgende ontbinding in componenten wordt gesubstitueerd $\boldsymbol{\gamma}_T=\gamma_x\mathbf{i}_x+\gamma_y\mathbf{i}_y$?
Antwoord: $\gamma_x^2+\gamma_y^2=0$.

Vraagstuk 28.9. Substitueer in het antwoord van Vraagstuk 28.7 $\boldsymbol{\alpha}_T=\alpha_x\mathbf{i}_x+\alpha_y\mathbf{i}_y$ en $\boldsymbol{\beta}_T=\beta_x\mathbf{i}_x+\beta_y\mathbf{i}_y$ en in het antwoord van Vraagstuk 28.8 $\gamma_x=\alpha_x+j\beta_x$ en $\gamma_y=\alpha_y+j\beta_y$ en bewijs, dat beide antwoorden leiden tot $\alpha_x^2+\alpha_y^2-\beta_x^2-\beta_y^2=0$ en $\alpha_x\beta_x+\alpha_y\beta_y=0$.

Vraagstuk 28.10. Bewijs, dat — zie Vergelijking (28.6) — van $\boldsymbol{\gamma}_T\times\mathbf{h}_T$ alleen de z-component ongelijk aan nul is.

Vraagstuk 28.11. Bewijs, dat — zie Vergelijking (28.6) — van $\boldsymbol{\gamma}_T\times\mathbf{i}_z$ alleen de transversale component ongelijk aan nul is.

29. Reflectie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp

In deze paragraaf bepalen wij het elektromagnetische veld dat ontstaat als een gegeven, driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp reflecteert. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; de gebruikte complexe tijdfactor is $\exp(j\omega t)$. Om de plaats in de configuratie vast te leggen, gebruiken wij een rechts-cyclisch Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan het vlak $z = 0$ samenvalt met het grensvlak van het elektrisch ondoordringbare voorwerp. In de configuratie onderscheiden wij twee gebieden, namelijk het gebied $\mathscr{D}_1$ waarvoor $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < 0$ en het gebied $\mathscr{D}_2$ waarvoor $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$,

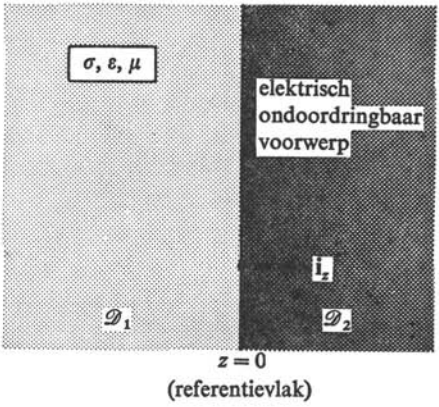


Fig. 66. Reflectie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak $z = 0$ van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp.

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

$0 < z < \infty$. Het elektrisch ondoordringbare voorwerp bevindt zich in $\mathscr{D}_2$ (Fig. 66). In $\mathscr{D}_1$ is een medium aanwezig waarvan de elektromagnetische eigenschappen worden beschreven door de constitutieve vergelijkingen (26.6) t/m (26.8). In dit medium is een elektromagnetisch golfverschijnsel aanwezig. Een deel hiervan noemen wij de *invallende golf*. Dit deel is de golf die in $\mathscr{D}_1$ en $\mathscr{D}_2$ aanwezig zou zijn als het elektrisch ondoordringbare voorwerp er niet zou zijn en in $\mathscr{D}_2$ hetzelfde medium aanwezig zou zijn als in $\mathscr{D}_1$. De elektrische en de magnetische veldsterkte van de invallende golf worden als gegeven beschouwd. Zij zullen worden aangeduid met $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$ en zijn gedefinieerd in $\mathscr{D}_1$ en $\mathscr{D}_2$. De elektrische en de magnetische veldsterkte van het *totale elektromagnetische veld* duiden wij aan met $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$; deze grootheden zijn alleen in $\mathscr{D}_1$ gedefinieerd. Om het totale elektromagnetische veld te berekenen, voeren wij vervolgens de *gereflecteerde* of *teruggekaatste golf* in. De elektrische en de magnetische veldsterkte van de teruggekaatste golf zullen worden aangeduid met $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$. Zij zijn gedefinieerd in $\mathscr{D}_1$ en wel als volgt

$$\mathbf{E}^r \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} - \mathbf{E}^i \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 \tag{29.1}$$

en

$$\mathbf{H}^r \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H} - \mathbf{H}^i \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 . \tag{29.2}$$

Dan is

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 \tag{29.3}$$

en

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 . \tag{29.4}$$

Daar de gereflecteerde golf ontstaat door de aanwezigheid van het elektrisch ondoordringbare voorwerp in $\mathscr{D}_2$, heeft het veld $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$ geen bronnen in $\mathscr{D}_1$ en voldoen $\mathbf{E}^r$ en $\mathbf{H}^r$ in hun definitiegebied aan de bronvrije elektromagnetische veldvergelijkingen

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H}^r = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, \mathbf{E}^r \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 , \tag{29.5}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E}^r = -j\omega\mu \mathbf{H}^r \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 . \tag{29.6}$$

Verder moet de totale elektrische veldsterkte nog voldoen aan de randvoorwaarden die gelden bij nadering van het oppervlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp (zie (11.17)). Met gebruikmaking van de in Par. 28 ingevoerde notatie is deze randvoorwaarde te schrijven als

$$\lim_{z \uparrow 0} \mathbf{E}_T = \mathbf{0} \quad \text{voor} \quad -\infty < x < \infty , \quad -\infty < y < \infty . \tag{29.7}$$

Substitutie van (29.3) in (29.7) geeft

$$\lim_{z \uparrow 0} \mathbf{E}_T^r = -\lim_{z \uparrow 0} \mathbf{E}_T^i \quad \text{voor} \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < y < \infty \tag{29.8}$$

als randvoorwaarde voor de gereflecteerde golf. Tenslotte moet nog in rekening worden gebracht, dat op fysische gronden de gereflecteerde golf zich in $\mathscr{D}_1$ van het grensvlak af moet voortplanten.

De elektrische en de magnetische veldsterkte van de invallende golf worden gegeven door

$$\mathbf{E}^{i} = \mathbf{e}^{i} \exp(-\boldsymbol{\gamma}^{i} \cdot \mathbf{r}) \tag{29.9}$$

en

$$\mathbf{H}^{i} = \mathbf{h}^{i} \exp(-\boldsymbol{\gamma}^{i} \cdot \mathbf{r}), \tag{29.10}$$

waarin $\boldsymbol{\gamma}^{i}$, $\mathbf{e}^{i}$ en $\mathbf{h}^{i}$ aan de in Par. 26 en Par. 28 afgeleide betrekkingen voldoen. Substitutie van (29.9) in (29.8) geeft

$$\lim_{z \uparrow 0} \mathbf{E}_{T}^{r} = -\mathbf{e}_{T}^{i} \exp(-\boldsymbol{\gamma}_{T}^{i} \cdot \mathbf{r}_{T}) \text{ voor } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty. \tag{29.11}$$

Daar het rechterlid van (29.11) alleen via de factor $\exp(-\boldsymbol{\gamma}_{T}^{i} \cdot \mathbf{r}_{T})$ van x en y afhangt, hangt ook het linkerlid alleen volgens deze factor van x en y af. Het gevolg is, dat ook de teruggekaatste golf een driedimensionale, vlakke golf is, die wij schrijven als

$$\mathbf{E}^{r} = \mathbf{e}^{r} \exp(-\boldsymbol{\gamma}^{r} \cdot \mathbf{r}) \tag{29.12}$$

en

$$\mathbf{H}^{r} = \mathbf{h}^{r} \exp(-\boldsymbol{\gamma}^{r} \cdot \mathbf{r}). \tag{29.13}$$

Substitutie van (29.12) in (29.11) leidt tot

$$\boldsymbol{\gamma}_{T}^{r} = \boldsymbol{\gamma}_{T}^{i} \tag{29.14}$$

en

$$\mathbf{e}_{T}^{r} = -\mathbf{e}_{T}^{i}. \tag{29.15}$$

Nu geldt echter (zie (26.30)) zowel

$$\boldsymbol{\gamma}^{i} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{i} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, j\omega\mu \tag{29.16}$$

als

$$\boldsymbol{\gamma}^{r} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{r} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, j\omega\mu, \tag{29.17}$$

zodat toepassing van (29.14) leidt tot

$$(\gamma_{z}^{r})^{2} = (\gamma_{z}^{i})^{2}. \tag{29.18}$$

Hieruit volgt

$$\gamma_{z}^{r} = -\gamma_{z}^{i}, \tag{29.19}$$

omdat de z-component van de voortplantingsvector van de teruggekaatste golf in richting tegengesteld moet zijn aan de z-component van de voortplantingsvector van de invallende golf. Nu $\boldsymbol{\gamma}^{r}$ en $\mathbf{e}_{T}^{r}$ bekend

zijn, kan men met behulp van (28.7) t/m (28.10) de overige componenten van de gereflecteerde golf bepalen. De resultaten zijn samengevat in Tabel 21. Hiermee is het reflectievraagstuk volledig opgelost. In de terminologie van Par. 27 kunnen wij stellen, dat in het gebied $\mathscr{D}_1$ twee interfererende golven aanwezig zijn met veldsterkten $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$, respectievelijk $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$.

Tabel 21. Reflectie van een driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golf tegen het platte grensvlak $z = 0$ van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp

invallende golf	*teruggekaatste golf*	
$\boldsymbol{\gamma}^i$	$\boldsymbol{\gamma}_T^r = \boldsymbol{\gamma}_T^i$	$\gamma_z^r = -\gamma_z^i$
$\mathbf{e}^i$	$\mathbf{e}_T^r = -\mathbf{e}_T^i$	$e_z^r = e_z^i$
$\mathbf{h}^i$	$\mathbf{h}_T^r = \mathbf{h}_T^i$	$h_z^r = -h_z^i$

Een aantal gevallen zullen hieronder nog apart worden besproken. Deze hebben betrekking op een speciale polarisatietoestand, een speciale propagatievoorwaarde, dan wel een speciaal medium waarin de reflectie plaatsvindt.

(a) *Elektrische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het grensvlak*

Als $\mathbf{E}^i$ lineair gepolariseerd is in een richting evenwijdig aan het grensvlak van het elektrisch ondoordringbare voorwerp, zijn ook $\mathbf{e}^i$, $\mathbf{e}^r$, $\mathbf{E}^r$ en $\mathbf{E}$ lineair gepolariseerd in deze richting. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij nu de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle elektrische veldsterkten die in de beschouwing zijn betrokken. Dan is

$$\mathbf{e}^i = e_y^i \mathbf{i}_y \qquad \text{en} \qquad \mathbf{e}^r = e_y^r \mathbf{i}_y . \tag{29.20}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (a) behandelde theorie hebben dan $\boldsymbol{\gamma}^i$ en $\mathbf{h}^i$, alsmede $\boldsymbol{\gamma}^r$ en $\mathbf{h}^r$ alleen een x- en een z-component. Het is gebruikelijk voor deze polarisatietoestand te stellen

$$e_y^r = \rho^E e_y^i , \tag{29.21}$$

waarin ρ^E de *reflectiefactor voor E-polarisatie* wordt genoemd. Uit (29.15) volgt onmiddellijk

$$\rho^E = -1. \tag{29.22}$$

(b) *Magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het grensvlak*

Als $\mathbf{H}^i$ lineair gepolariseerd is in een richting evenwijdig aan het grensvlak van het elektrisch ondoordringbare voorwerp, zijn ook $\mathbf{h}^i$, $\mathbf{h}^r$, $\mathbf{H}^r$ en $\mathbf{H}$ lineair gepolariseerd in deze richting. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij in dit geval de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle magnetische veldsterkten die in de beschouwing zijn betrokken. Dan is

$$\mathbf{h}^i = h_y^i \mathbf{i}_y \quad \text{en} \quad \mathbf{h}^r = h_y^r \mathbf{i}_y. \tag{29.23}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (b) behandelde theorie hebben dan $\boldsymbol{\gamma}^i$ en $\mathbf{e}^i$, alsmede $\boldsymbol{\gamma}^r$ en $\mathbf{e}^r$ alleen een x- en een z-component. Het is gebruikelijk voor deze polarisatietoestand te stellen

$$h_y^r = \rho^H h_y^i, \tag{29.24}$$

waarin ρ^H de *reflectiefactor voor H-polarisatie* wordt genoemd. Uit (29.15) volgt nu

$$e_x^r = -e_x^i. \tag{29.25}$$

Onder toepassing van (28.8) gaat (29.25) over in

$$\gamma_z^r h_y^r = -\gamma_z^i h_y^i. \tag{29.26}$$

Substitutie van (29.19) en (29.24) in (29.26) leidt tot

$$\rho^H = 1. \tag{29.27}$$

(c) *Reflectie van een uniforme, vlakke, invallende golf. De wet van* SNEL (SNELLIUS)

Als de invallende golf een uniforme vlakke golf is, geldt

$$\boldsymbol{\gamma}^i = \gamma \mathbf{s}^i, \tag{29.28}$$

waarin $\mathbf{s}^i$ de constante, reële eenheidsvector in zijn voortplantingsrichting voorstelt en

$$\gamma = [(\sigma + j\omega\varepsilon)\, j\omega\mu]^{\frac{1}{2}}. \tag{29.29}$$

Omtrent de keuze van de vierkantswortel in het rechterlid worden dezelfde afspraken gemaakt als in Par. 21. De eenheidsvector in de voortplantingsrichting $\mathbf{s}^i$ en de eenheidsvector in de richting van de normaal op het grensvlak $\mathbf{i}_z$ spannen samen een plat vlak op dat het *vlak van inval* wordt genoemd. De hoek θ^i die $\mathbf{s}^i$ met $\mathbf{i}_z$ maakt, wordt de *hoek van inval* genoemd (Fig. 67). Dan is

$$s_z^i = \cos(\theta^i) \quad \text{en} \quad \mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{s}_T^i = \sin^2(\theta^i). \tag{29.30}$$

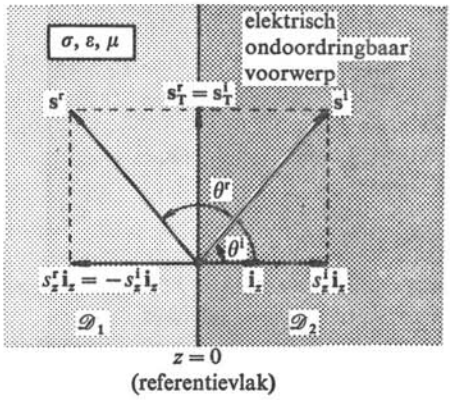


Fig. 67. Reflectie van een uniforme, vlakke, invallende golf tegen het platte grensvlak van een elektrisch ondoordringbaar voorwerp.

De hoek van inval is beperkt tot het interval $-\pi/2 < \theta^i < \pi/2$. Uit (29.14) volgt nu

$$\boldsymbol{\gamma}_T^r = \gamma \mathbf{s}_T^i \tag{29.31}$$

en uit (29.19)

$$\gamma_z^r = -\gamma s_z^i = -\gamma \cos(\theta^i). \tag{29.32}$$

Derhalve kunnen wij $\boldsymbol{\gamma}^r$ schrijven als

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \gamma \mathbf{s}^r, \tag{29.33}$$

waarin $\mathbf{s}^r$ een constante, reële eenheidsvector is en wel

$$\mathbf{s}^r = \mathbf{s}_T^i - s_z^i \mathbf{i}_z. \tag{29.34}$$

Ook de teruggekaatste golf is dus een uniforme, vlakke golf. Daar wij voor (29.34) kunnen schrijven $\mathbf{s}^r = \mathbf{s}^i - 2 s_z^i \mathbf{i}_z$ is ook $\mathbf{s}^r$ gelegen in het

vlak van inval. De hoek θ^r die $\mathbf{s}^r$ met $\mathbf{i}_z$ maakt, noemen wij de *hoek van terugkaatsing*. Hiervoor geldt

$$\theta^r = \pi - \theta^i, \tag{29.35}$$

zoals uit (29.32) en (29.33) volgt. De hier beschreven resultaten met betrekking tot de voortplantingsrichting van de teruggekaatste golf staan bekend als de *wetten van* SNEL (SNELLIUS) *voor de terugkaatsing*.

(d) *Reflectie van een uniforme, vlakke golf in een medium waarvoor* $\sigma = 0$, *terwijl* ε *en* μ *reëel en positief zijn*

Voor het beschouwde medium gaan (29.28) en (29.33) over in

$$\gamma^i = \mathrm{j}\beta\mathbf{s}^i \tag{29.36}$$

en

$$\gamma^r = \mathrm{j}\beta\mathbf{s}^r, \tag{29.37}$$

waarin

$$\beta = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}. \tag{29.38}$$

Voor de elektrische en de magnetische veldsterkte van het totale veld wordt nu met behulp van (29.9), (29.10), (29.12), (29.13), (29.30) en (29.34) verkregen

$$\mathbf{E} = \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\,\{\mathbf{e}^i \exp[-\mathrm{j}\beta z\cos(\theta^i)] + \mathbf{e}^r \exp[\mathrm{j}\beta z\cos(\theta^i)]\}, \tag{29.39}$$

$$\mathbf{H} = \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\,\{\mathbf{h}^i \exp[-\mathrm{j}\beta z\cos(\theta^i)] + \mathbf{h}^r \exp[\mathrm{j}\beta z\cos(\theta^i)]\}. \tag{29.40}$$

Met gebruikmaking van de in Tabel 21 vermelde resultaten zijn deze uitdrukkingen te herleiden tot

$$\mathbf{E}_T = -2\mathrm{j}\mathbf{e}_T^i \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\sin[\beta z\cos(\theta^i)], \tag{29.41}$$

$$E_z = 2e_z^i \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\cos[\beta z\cos(\theta^i)], \tag{29.42}$$

$$\mathbf{H}_T = 2\mathbf{h}_T^i \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\cos[\beta z\cos(\theta^i)], \tag{29.43}$$

$$H_z = -2\mathrm{j}h_z^i \exp(-\mathrm{j}\beta\mathbf{s}_T^i \cdot \mathbf{r}_T)\sin[\beta z\cos(\theta^i)]. \tag{29.44}$$

Hieruit blijkt, dat het totale elektromagnetische veld dat in het gebied $\mathscr{D}_1$ aanwezig is, is op te vatten als een golf die een lopend karakter vertoont in de richting van $\mathbf{s}_T^i$, dus evenwijdig aan het grensvlak, en een staand karakter in de z-richting, dus loodrecht op het grensvlak.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 29.1. In de in Fig. 67 weergegeven configuratie valt een uniforme vlakke golf op het grensvlak $z = 0$ in. De elektrische veldsterkte van de invallende golf is gegeven door $\mathbf{E}^i = e_y^i \exp(-\gamma \mathbf{s}^i \cdot \mathbf{r})\mathbf{i}_y$, met $\mathbf{s}^i = \sin(\theta^i)\mathbf{i}_x + \cos(\theta^i)\mathbf{i}_z$. Voor het in het gebied $\mathscr{D}_1$ aanwezige medium geldt $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn. Bepaal (a) de elektrische veldsterkte $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r$ van het totale veld, (b) de oppervlakken waar $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T$.
Antwoord: (a) $\mathbf{E} = -2je_y^i \mathbf{i}_y \exp[-j\beta x \sin(\theta^i)] \sin[\beta z \cos(\theta^i)]$, met $\beta = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} = 2\pi/\lambda$; (b) $z = -m\lambda/2\cos(\theta^i)$ voor $m = 0, 1, 2, \ldots$; (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T = 2(\varepsilon/\mu)^{\frac{1}{2}} |e_y^i|^2 \sin(\theta^i) \sin^2[\beta z \cos(\theta^i)]\mathbf{i}_x$.

Vraagstuk 29.2. In de in Fig. 67 weergegeven configuratie valt een uniforme vlakke golf op het grensvlak $z = 0$ in. De magnetische veldsterkte van de invallende golf is gegeven door $\mathbf{H}^i = h_y^i \exp(-\gamma \mathbf{s}^i \cdot \mathbf{r})\mathbf{i}_y$, met $\mathbf{s}^i = \sin(\theta^i)\mathbf{i}_x + \cos(\theta^i)\mathbf{i}_z$. Voor het in het gebied $\mathscr{D}_1$ aanwezige medium geldt $\sigma = 0$, terwijl ε en μ reëel en positief zijn. Bepaal (a) de magnetische veldsterkte $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r$ van het totale veld, (b) de oppervlakken waar $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T$.
Antwoord: (a) $\mathbf{H} = 2h_y^i \mathbf{i}_y \exp[-j\beta x \sin(\theta^i)] \cos[\beta z \cos(\theta^i)]$, met $\beta = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} = 2\pi/\lambda$; (b) $z = -(m+\frac{1}{2})\lambda/2 \cos(\theta^i)$ voor $m = 0, 1, 2, \ldots$; (c) $\langle \mathbf{S} \rangle_T = 2(\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} |h_y^i|^2 \sin(\theta^i) \times \cos^2[\beta z \cos(\theta^i)]\mathbf{i}_x$.

Vraagstuk 29.3. In de in Fig. 66 weergegeven configuratie is een willekeurig, sinusvormig met de tijd veranderend invallend veld $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\} = \{\mathbf{E}^i(x,y,z), \mathbf{H}^i(x,y,z)\}$ aanwezig. In het gebied $\mathscr{D}_2$ voldoet $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$ aan de bronvrije elektromagnetische veldvergelijkingen voor een medium met constitutieve coëfficiënten σ, ε en μ. Laat zien, dat in het gebied $\mathscr{D}_1$ het totale veld $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ is gegeven door $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^r$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^r$, waarin de transversale en de z-componenten van $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$ zijn weergegeven in bijgaande Tabel. (Aanwijzing: het veld $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$ voldoet in $\mathscr{D}_1$ aan de bronvrije elektromagnetische veldvergelijkingen voor een medium met constitutieve coëfficiënten σ, ε en μ, het veld $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ voldoet aan de gestelde randvoorwaarden voor $z \uparrow 0$ en het veld $\{\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r\}$ bestaat uit golven van het grensvlak af, als $\{\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\}$ bestaat uit golven naar het grensvlak toe.) De hier beschreven methode staat bekend als de *spiegelingsmethode.*

Tabel bij Vraagstuk 29.3

$\mathbf{E}_T^r(x,y,z) = -\mathbf{E}_T^i(x,y,-z)$
$E_z^r(x,y,z) = +E_z^i(x,y,-z)$
$\mathbf{H}_T^r(x,y,z) = +\mathbf{H}_T^i(x,y,-z)$
$H_z^r(x,y,z) = -H_z^i(x,y,-z)$
hierin is $-\infty < z < 0$

30. Reflectie en transmissie van driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven door een plat scheidingsvlak tussen twee media

In deze paragraaf bestuderen wij de verschijnselen die optreden, indien ter weerszijden van een plat scheidingsvlak tussen twee media met verschillende elektromagnetische eigenschappen driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven aanwezig zijn. Het geval van eendimensionale golven is in Par. 23 behandeld. Veel van de daar gebruikte methodiek zal ook hier weer worden toegepast. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; de gebruikte complexe tijdfactor is $\exp(j\omega t)$. Om de plaats in de ruimte vast te leggen, gebruiken wij een rechts-cyclisch, Cartesiaans coördinatenstelsel waarvan het vlak $z=0$ samenvalt met het scheidingsvlak tussen de twee media (Fig. 68). In de configuratie onderscheiden wij twee gebieden, namelijk het gebied $\mathscr{D}_1$ waarvoor $-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $-\infty<z<0$ en het gebied $\mathscr{D}_2$ waarvoor

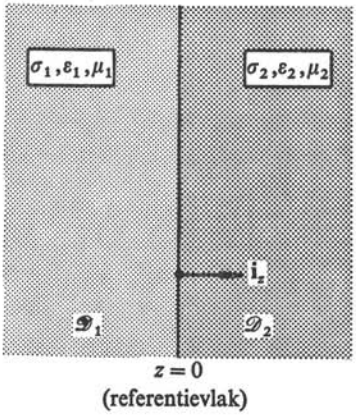


Fig. 68. Reflectie en transmissie door een plat scheidingsvlak tussen twee media (driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven).

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

$-\infty<x<\infty$, $-\infty<y<\infty$, $0<z<\infty$. In beide gebieden is een medium aanwezig waarvan de elektromagnetische eigenschappen worden beschreven door constitutieve vergelijkingen van de gedaante (26.6) t/m (26.8). Wat de constitutieve coëfficiënten betreft, stellen wij

$$\sigma = \sigma_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \quad \mu = \mu_1 \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 \tag{30.1}$$

en

$$\sigma = \sigma_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_2, \quad \mu = \mu_2 \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_2. \tag{30.2}$$

In de media zijn driedimensionale, vlakke, elektromagnetische golven aanwezig. De veldgrootheden die dit golfverschijnsel beschrijven, stellen wij voor door

$$\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\} = \{\mathbf{E}_1,\mathbf{H}_1,\mathbf{J}_1,\mathbf{D}_1,\mathbf{B}_1\} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_1 \tag{30.3}$$

en

$$\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\} = \{\mathbf{E}_2,\mathbf{H}_2,\mathbf{J}_2,\mathbf{D}_2,\mathbf{B}_2\} \quad \text{in} \quad \mathscr{D}_2. \tag{30.4}$$

Koppeling tussen de velden die in $\mathscr{D}_1$ aanwezig zijn en de velden die in $\mathscr{D}_2$ aanwezig zijn, treedt op via de randvoorwaarden bij doorgang door een scheidingsvlak van twee media. Hiervoor geldt (zie (18.21) en (18.22) met gebruikmaking van de in Par. 28 ingevoerde notatie)

$$\lim_{z\uparrow 0} \mathbf{E}_{1,\mathrm{T}} = \lim_{z\downarrow 0} \mathbf{E}_{2,\mathrm{T}} \quad \text{voor} \quad -\infty<x<\infty, \; -\infty<y<\infty, \tag{30.5}$$

$$\lim_{z\uparrow 0} \mathbf{H}_{1,\mathrm{T}} = \lim_{z\downarrow 0} \mathbf{H}_{2,\mathrm{T}} \quad \text{voor} \quad -\infty<x<\infty, \; -\infty<y<\infty. \tag{30.6}$$

Onderstel nu, dat zowel in $\mathscr{D}_1$ als in $\mathscr{D}_2$ een elektromagnetisch veld aanwezig is, dat uit een superpositie van driedimensionale, vlakke golven bestaat. De randvoorwaarden (30.5) en (30.6), die identiek in x en y gelden, leiden dan tot een koppeling tussen alleen die golven die dezelfde voortplantingsfactor in de transversale richting bezitten, dat wil zeggen tussen de golven met dezelfde waarde van γ_{T}. Golven met een verschillende γ_{T} zijn onderling ontkoppeld. Wij kunnen derhalve onze analyse beperken tot die golven waarvan γ_{T} een voorgeschreven waarde heeft, en wel dezelfde in $\mathscr{D}_1$ als in $\mathscr{D}_2$.

Laat nu γ_1 de complexe voortplantingsvector zijn van een golf in $\mathscr{D}_1$, dan moet gelden

$$\gamma_1 \cdot \gamma_1 = (\sigma_1 + \mathrm{j}\omega\varepsilon_1)\,\mathrm{j}\omega\mu_1, \tag{30.7}$$

of

$$\gamma_{1,z}^2 = (\sigma_1 + \mathrm{j}\omega\varepsilon_1)\,\mathrm{j}\omega\mu_1 - \gamma_{\mathrm{T}} \cdot \gamma_{\mathrm{T}}. \tag{30.8}$$

Hieruit volgen twee waarden van $\gamma_{1,z}$, die tegengesteld gelijk zijn. Wij

voeren nu in

$$\gamma_{1,z} \stackrel{\text{def}}{=} [(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, j\omega\mu_1 - \boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T]^{\frac{1}{2}}, \tag{30.9}$$

waarin omtrent de keuze van de vierkantswortel in het rechterlid dezelfde afspraken worden gemaakt als in Par. 21. De twee mogelijke vlakke golven in $\mathscr{D}_1$ hebben dan onderscheidenlijk de complexe voortplantingsfactoren $\exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T - \gamma_{1,z} z)$ en $\exp(-\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{r}_T + \gamma_{1,z} z)$, waarin $\boldsymbol{\gamma}_T$ een voorgeschreven waarde heeft. Wat de z-afhankelijkheid betreft, heeft de eerstgenoemde voortplantingsfactor betrekking op een golf in de positieve z-richting en de laatstgenoemde voortplantingsfactor betrekking op een golf in de negatieve z-richting. Aansluitend bij de in Par. 21 en Par. 23 gebruikte notatie geven wij de elektrische en de magnetische veldsterkte in $\mathscr{D}_1$ aan met

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^+ + \mathbf{E}_1^-, \tag{30.10}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^+ + \mathbf{H}_1^-, \tag{30.11}$$

waarin

$$\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\} = \{\mathbf{e}_1^+, \mathbf{h}_1^+\} \exp(-\boldsymbol{\gamma}_1^+ \cdot \mathbf{r}) \tag{30.12}$$

en

$$\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\} = \{\mathbf{e}_1^-, \mathbf{h}_1^-\} \exp(-\boldsymbol{\gamma}_1^- \cdot \mathbf{r}), \tag{30.13}$$

met

$$\boldsymbol{\gamma}_1^+ = \boldsymbol{\gamma}_T + \gamma_{1,z} \mathbf{i}_z \tag{30.14}$$

en

$$\boldsymbol{\gamma}_1^- = \boldsymbol{\gamma}_T - \gamma_{1,z} \mathbf{i}_z. \tag{30.15}$$

Een soortgelijke overweging geldt ten aanzien van de in $\mathscr{D}_2$ aanwezige vlakke golven. Hiervoor geldt

$$\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 = (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, j\omega\mu_2. \tag{30.16}$$

Verder voeren wij in

$$\gamma_{2,z} \stackrel{\text{def}}{=} [(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, j\omega\mu_2 - \boldsymbol{\gamma}_T \cdot \boldsymbol{\gamma}_T]^{\frac{1}{2}} \tag{30.17}$$

met dezelfde afspraken omtrent de keuze van de vierkantswortel in het rechterlid als boven. De elektrische en de magnetische veldsterkte in $\mathscr{D}_2$ geven wij aan met

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^+ + \mathbf{E}_2^-, \tag{30.18}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^+ + \mathbf{H}_2^-, \tag{30.19}$$

waarin

$$\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\} = \{\mathbf{e}_2^+, \mathbf{h}_2^+\} \exp(-\boldsymbol{\gamma}_2^+ \cdot \mathbf{r}) \tag{30.20}$$

en

$$\{\mathbf{E}_2^-, \mathbf{H}_2^-\} = \{\mathbf{e}_2^-, \mathbf{h}_2^-\} \exp(-\gamma_2^- \cdot \mathbf{r}), \tag{30.21}$$

met

$$\gamma_2^+ = \gamma_T + \gamma_{2,z}\mathbf{i}_z \tag{30.22}$$

en

$$\gamma_2^- = \gamma_T - \gamma_{2,z}\mathbf{i}_z. \tag{30.23}$$

Voor elk van de vier golven gelden tussen γ, $\mathbf{e}$ en $\mathbf{h}$ betrekkingen zoals in Par. 26 en Par. 28 zijn behandeld.

Substitutie van (30.10) t/m (30.13) en (30.18) t/m (30.21) in de randvoorwaarden (30.5) en (30.6) leidt tot

$$\mathbf{e}_{1,T}^+ + \mathbf{e}_{1,T}^- = \mathbf{e}_{2,T}^+ + \mathbf{e}_{2,T}^-, \tag{30.24}$$

$$\mathbf{h}_{1,T}^+ + \mathbf{h}_{1,T}^- = \mathbf{h}_{2,T}^+ + \mathbf{h}_{2,T}^-. \tag{30.25}$$

De betrekkingen tussen de componenten van de veldgrootheden ter weerszijden van het scheidingsvlak die uit (30.24) en (30.25) volgen, kunnen — evenals in Par. 23 — het overzichtelijkst gerangschikt worden door invoering van de overdrachtsmatrix en de verstrooiingsmatrix. Enerzijds moet men hierbij wederom onderscheid maken tussen de analyse op basis van de elektrische en de analyse op basis van de magnetische veldsterkte, anderzijds blijken de betrekkingen tussen de transversale componenten van de veldgrootheden anders te zijn dan de betrekkingen tussen hun z-componenten. Dit alles maakt de behandeling van het hier beschouwde vraagstuk gecompliceerd. Daarom zullen wij onder (a), (b) en (c) een aantal deelproblemen die niet zo gecompliceerd zijn, vooraf behandelen.

(a) *Voortplantingseigenschappen van de golven. De wetten van* SNEL (SNELLIUS) *voor de terugkaatsing en de breking van uniforme, vlakke golven*

Door (30.14), (30.15), (30.22) en (30.23) zijn bij iedere voorgeschreven waarde van γ_T de complexe voortplantingsvectoren van de vier mogelijk optredende golven volledig bepaald. De vraag rijst nu onder welke voorwaarden sommige van deze golven — dan wel deze golven allemaal — uniforme, vlakke golven kunnen zijn. Het is duidelijk, dat in ieder geval één ervan een uniforme, vlakke golf kan zijn. Onderstel, dat dit voor $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ het geval is. Dan is γ_1^+ van de gedaante

$$\gamma_1^+ = \gamma_1 \mathbf{s}_1^+, \tag{30.26}$$

waarin $\mathbf{s}_1^+$ een constante, reële eenheidsvector is en

$$\gamma_1 = [(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, j\omega\mu_1]^{\frac{1}{2}}. \tag{30.27}$$

Substitutie van (30.26) in (30.14) geeft

$$\boldsymbol{\gamma}_T = \gamma_1 \mathbf{s}_{1,T}^+ \quad \text{en} \quad \gamma_{1,z} = \gamma_1 s_{1,z}^+. \tag{30.28}$$

In de eerste plaats onderzoeken wij wat hieruit volgt met betrekking tot de golf $\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\}$. Substitutie van (30.28) in (30.15) geeft

$$\boldsymbol{\gamma}_1^- = \gamma_1 \mathbf{s}_{1,T}^+ - \gamma_1 s_{1,z}^+ \mathbf{i}_z, \tag{30.29}$$

zodat $\boldsymbol{\gamma}_1^-$ is te schrijven als

$$\boldsymbol{\gamma}_1^- = \gamma_1 \mathbf{s}_1^-, \tag{30.30}$$

waarin

$$\mathbf{s}_1^- = \mathbf{s}_{1,T}^+ - s_{1,z}^+ \mathbf{i}_z. \tag{30.31}$$

Uit (30.31) blijkt, dat $\mathbf{s}_1^-$ een constante, reële eenheidsvector is. Derhalve is ook $\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\}$ een uniforme, vlakke golf.

Wij beschouwen nu het geval, dat $\{\mathbf{E}_2^-, \mathbf{H}_2^-\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$. Dan is $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ de enige golf die op het scheidingsvlak van de twee media invalt, $\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\}$ de golf die door het scheidingsvlak wordt teruggekaatst in het gebied $\mathscr{D}_1$ en $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$ de golf die door het scheidingsvlak heen wordt doorgelaten in het gebied $\mathscr{D}_2$. De vectoren $\mathbf{s}_1^+$ en $\mathbf{i}_z$ (= eenheidsvector in de richting van de normaal op het scheidingsvlak) spannen samen een plat vlak op, dat wederom het *vlak van inval* wordt genoemd. Verder voeren wij wederom de hoek θ_1^i die $\mathbf{s}_1^+$ met $\mathbf{i}_z$ maakt, in als de *hoek van inval* en de hoek θ_1^r die $\mathbf{s}_1^-$ met $\mathbf{i}_z$ maakt, als de *hoek van terugkaatsing*. Daar (30.31) is te herschrijven als $\mathbf{s}_1^- = \mathbf{s}_1^+ - 2s_{1,z}^+ \mathbf{i}_z$, is ook $\mathbf{s}_1^-$ in het vlak van inval gelegen. Verder geldt tussen θ_1^r en θ_1^i de betrekking

$$\theta_1^r = \pi - \theta_1^i. \tag{30.32}$$

Deze betrekkingen tussen de voortplantingsrichtingen van de invallende en de teruggekaatste golf staan bekend als de *wetten van* SNEL (SNELLIUS) *voor de terugkaatsing*; zij hebben dezelfde gedaante als die in Par. 29.

In de tweede plaats onderzoeken wij wat er uit (30.26) volgt met betrekking tot de golf $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$. Substitutie van $\boldsymbol{\gamma}_T$ uit (30.28) in (30.22) geeft

$$\boldsymbol{\gamma}_2^+ = \gamma_1 \mathbf{s}_{1,T}^+ + \gamma_{2,z} \mathbf{i}_z. \tag{30.33}$$

In het algemeen leidt (30.33) niet tot een uniforme, vlakke golf. Wij zullen thans nagaan onder welke voorwaarden dit wel het geval is.

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor is, dat γ_2^+ kan worden geschreven als

$$\gamma_2^+ = \gamma_2 \mathbf{s}_2^+, \tag{30.34}$$

waarin $\mathbf{s}_2^+$ een constante, reële eenheidsvector is en

$$\gamma_2 = [(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, j\omega\mu_2]^{\frac{1}{2}}. \tag{30.35}$$

Gelijkstellen van het rechterlid van (30.33) aan het rechterlid van (30.34) leidt tot

$$\gamma_1 \mathbf{s}_{1,T}^+ = \gamma_2 \mathbf{s}_{2,T}^+ \tag{30.36}$$

en

$$\gamma_{2,z} = \gamma_2 s_{2,z}^+, \tag{30.37}$$

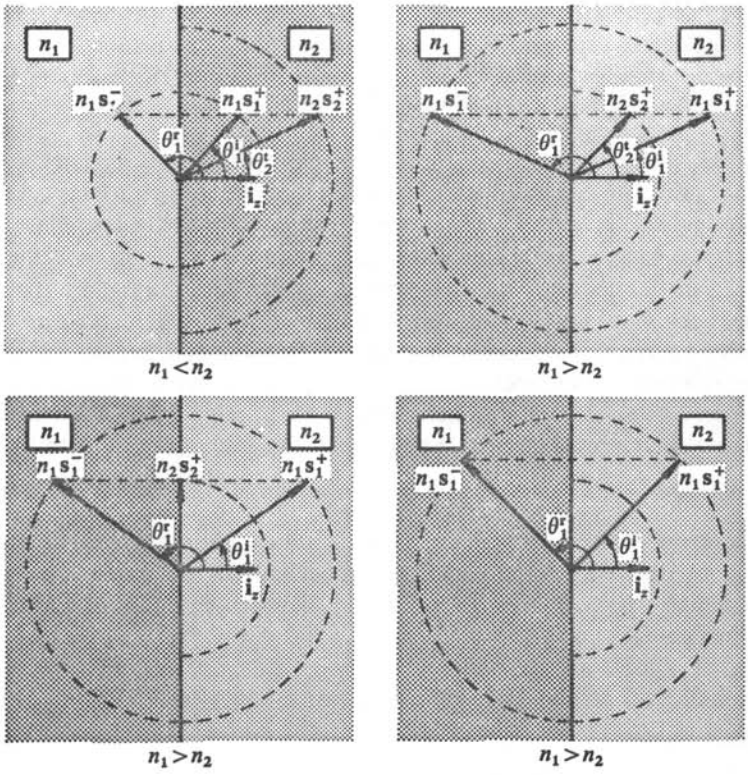


Fig. 69. Constructie van de hoek van terugkaatsing en de hoek van doorlating of breking volgens de wetten van SNEL (SNELLIUS).

met

$$\mathbf{s}^+_{2,T}\cdot\mathbf{s}^+_{2,T} + (s^+_{2,z})^2 = 1\,. \tag{30.38}$$

Het is gebruikelijk in (30.36) de complexe brekingsindex van de uniforme vlakke golven in te voeren. Met behulp van

$$\gamma_1 = \mathrm{j}(\omega/c_0)\, n_1 \tag{30.39}$$

en

$$\gamma_2 = \mathrm{j}(\omega/c_0)\, n_2 \tag{30.40}$$

gaat (30.36) over in

$$n_1 \mathbf{s}^+_{1,T} = n_2 \mathbf{s}^+_{2,T}, \tag{30.41}$$

terwijl uit (30.38) volgt

$$s^+_{2,z} = (1-\mathbf{s}^+_{2,T}\cdot\mathbf{s}^+_{2,T})^{\frac{1}{2}}, \tag{30.42}$$

waarin $(\ldots)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Aan (30.41) is alleen te voldoen *als* n_1/n_2 *reëel is*, terwijl (30.42) aan $\mathbf{s}^+_{2,T}$ de beperking $0 \leq \mathbf{s}^+_{2,T}\cdot\mathbf{s}^+_{2,T} \leq 1$ oplegt.

Wij onderstellen nu, dat n_1/n_2 reëel is. Naast de reeds ingevoerde hoeken θ^{i}_1 en θ^{r}_1 voeren wij nu de hoek θ^{t}_2 die $\mathbf{s}^+_2$ met $\mathbf{i}_z$ maakt, in als de *hoek van doorlating* of *breking*. Daar $\mathbf{s}^+_2 = (n_1/n_2)\mathbf{s}^+_1 + [s^+_{2,z} - (n_1/n_2)s^+_{1,z}]\mathbf{i}_z$, is ook $\mathbf{s}^+_2$ in het vlak van inval gelegen, terwijl uit (30.41) de betrekking

$$n_1 \sin(\theta^{\mathrm{i}}_1) = n_2 \sin(\theta^{\mathrm{t}}_2) \tag{30.43}$$

tussen θ^{t}_2 en θ^{i}_1 volgt, waarbij (30.42) de hoek θ^{t}_2 tot reële waarden beperkt (Fig. 69). Deze betrekkingen tussen de voortplantingsrichtingen van de invallende en de doorgelaten golf staan bekend als de *wetten van* SNEL (SNELLIUS) *voor de doorlating* of *de breking*. Om de beschikbare

Tabel 22. Beschikbare intervallen van de hoek van inval θ^{i}_1 *en de hoek van doorlating* θ^{t}_2 *voor uniforme, vlakke golven ter weerszijden van het scheidingsvlak tussen twee media* (n_1/n_2 *reëel en positief)*

	$0 < n_1/n_2 < 1$	$1 < n_1/n_2 < \infty$
$\sin(\theta^{\mathrm{i}}_1)$	$-1 < \sin(\theta^{\mathrm{i}}_1) < 1$	$-n_2/n_1 < \sin(\theta^{\mathrm{i}}_1) < n_2/n_1$
$\sin(\theta^{\mathrm{t}}_2)$	$-n_1/n_2 < \sin(\theta^{\mathrm{t}}_2) < n_1/n_2$	$-1 < \sin(\theta^{\mathrm{t}}_2) < 1$

voor de hoeken geldt altijd $-\pi/2 < \theta^{\mathrm{i}}_1 < \pi/2$ en $-\pi/2 < \theta^{\mathrm{t}}_2 < \pi/2$

intervallen van θ_1^i en θ_2^t te bepalen, moet men onderscheid maken tussen het geval $|n_1/n_2| < 1$ en het geval $|n_1/n_2| > 1$. Voor het meest voorkomende geval, waarin $n_1/n_2 > 0$, zijn de resultaten weergegeven in Tabel 22.

Als $n_1/n_2 > 1$, zijn buiten het beschikbare interval van θ_1^i de golven $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ en $\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\}$ nog wel uniform, maar de golf $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$ niet meer. De structuur van $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$ komt dan het duidelijkst tot uiting in het geval dat n_1 en n_2 beide reëel en positief zijn. Daar

$$\gamma_2^+ = \mathrm{j}(\omega/c_0)\, n_1 \mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+ + (\omega/c_0)\, n_2 [(n_1/n_2)^2\, \mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+ \cdot \mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+ - 1]^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{i}_z$$

$$\text{voor} \quad (n_2/n_1)^2 \leq \mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+ \cdot \mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+ \leq 1\,, \tag{30.44}$$

met $[\ldots]^{\frac{1}{2}} \geq 0$, zorgt de z-component van γ_2^+ in dit geval voor een exponentieel verval in de positieve z-richting en de transversale component voor een onverzwakte propagatie in de richting van $\mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+$. Derhalve is $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$ een niet-uniforme vlakke golf met vlakken van gelijke amplitude evenwijdig aan het scheidingsvlak van de twee media en vlakken van gelijke fase loodrecht op $\mathbf{s}_{1,\mathrm{T}}^+$. De doorgelaten golf dringt derhalve nauwelijks in het gebied $\mathscr{D}_2$ door. In de optica staat dit verschijnsel bekend als *totale terugkaatsing*; op hetgeen hier nog meer verband mee houdt, komen wij later terug.

Bij de hierboven gegeven toelichting hebben wij $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ als invallende golf beschouwd en ondersteld, dat de golf $\{\mathbf{E}_2^-, \mathbf{H}_2^-\}$ niet aanwezig was. Het is duidelijk, dat op soortgelijke wijze $\{\mathbf{E}_2^-, \mathbf{H}_2^-\}$ kan worden beschouwd als de golf die vanuit het gebied $\mathscr{D}_2$ op het scheidingsvlak invalt, waarbij $\{\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+\}$ als gereflecteerde golf in het gebied $\mathscr{D}_2$ en $\{\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-\}$ als doorgelaten golf in het gebied $\mathscr{D}_1$ optreedt. Bij dit laatste wordt dan ondersteld, dat de golf $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ niet aanwezig is. Indien zowel $\{\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+\}$ als $\{\mathbf{E}_2^-, \mathbf{H}_2^-\}$ aanwezig zijn, treedt superpositie van de beschouwde gevallen op en is de weergave met behulp van de overdrachtsmatrix of de verstrooiingsmatrix verreweg het overzichtelijkst.

(b) *Elektrische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het scheidingsvlak. De reflectiefactor van* FRESNEL *voor E-polarisatie*

Indien van één van de vier optredende golven de elektrische veldsterkte lineair gepolariseerd is in een richting evenwijdig aan het scheidingsvlak tussen de twee media, zijn de elektrische veldsterkten van alle vier de optredende golven lineair gepolariseerd in deze richting. De juistheid van deze bewering volgt uit de omstandigheid, dat hiermee aan alle

eisen van het vraagstuk kan worden voldaan. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij nu de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle elektrische veldsterkten die in het vraagstuk een rol spelen. Dan is

$$\mathbf{e}_1^+ = e_{1,y}^+ \mathbf{i}_y, \ \mathbf{e}_1^- = e_{1,y}^- \mathbf{i}_y, \ \mathbf{e}_2^+ = e_{2,y}^+ \mathbf{i}_y, \ \mathbf{e}_2^- = e_{2,y}^- \mathbf{i}_y. \tag{30.45}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (a) behandelde theorie hebben dan de grootheden γ_1^+, $\mathbf{h}_1^+$, γ_1^-, $\mathbf{h}_1^-$, γ_2^+, $\mathbf{h}_2^+$, γ_2^- en $\mathbf{h}_2^-$ alleen een x- en een z-component. De voorwaarde (30.24) gaat in dit geval over in

$$e_{1,y}^+ + e_{1,y}^- = e_{2,y}^+ + e_{2,y}^-, \tag{30.46}$$

terwijl onder toepassing van (28.10) de voorwaarde (30.25) overgaat in

$$Y_{1,z}(e_{1,y}^+ - e_{1,y}^-) = Y_{2,z}(e_{2,y}^+ - e_{2,y}^-), \tag{30.47}$$

waarin

$$Y_{1,z} = \gamma_{1,z}/\mathrm{j}\omega\mu_1 \tag{30.48}$$

en

$$Y_{2,z} = \gamma_{2,z}/\mathrm{j}\omega\mu_2. \tag{30.49}$$

De vergelijkingen (30.46) en (30.47) hebben dezelfde structuur als (23.32) en (23.33). Als gevolg hiervan kunnen wij de resultaten met betrekking tot de overdrachtsmatrix en de verstrooiingsmatrix meteen uit de in Par. 23 onder (a) verkregen resultaten aflezen. De overdrachtsmatrix voor E-polarisatie $[T_{1\to 2}^E]$, betrokken op het vlak $z=0$ als referentievlak, volgt uit

$$\begin{bmatrix} e_{1,y}^- \\ e_{1,y}^+ \end{bmatrix} = [T_{1\to 2}^E] \begin{bmatrix} e_{2,y}^- \\ e_{2,y}^+ \end{bmatrix} \tag{30.50}$$

en is gegeven door (zie (23.38))

$$[T_{1\to 2}^E] = \frac{1}{1+\rho_{1,2}^E} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2}^E \\ \rho_{1,2}^E & 1 \end{bmatrix}, \tag{30.51}$$

waarin (zie (23.36))

$$\rho_{1,2}^E = (Y_{1,z} - Y_{2,z})/(Y_{1,z} + Y_{2,z}) \tag{30.52}$$

de reflectiefactor voor E-polarisatie is. De verstrooiingsmatrix voor E-polarisatie $[S_{1\leftrightarrow 2}^E]$, betrokken op het vlak $z=0$ als referentievlak, volgt uit

$$\begin{bmatrix} e_{1,y}^- \\ e_{2,y}^+ \end{bmatrix} = [S_{1\leftrightarrow 2}^E] \begin{bmatrix} e_{1,y}^+ \\ e_{2,y}^- \end{bmatrix} \tag{30.53}$$

en is gegeven door (zie (23.39))

$$[S^E_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} \rho^E_{1,2} & 1-\rho^E_{1,2} \\ 1-\rho^E_{2,1} & \rho^E_{2,1} \end{bmatrix}, \tag{30.54}$$

waarin $\rho^E_{1,2}$ is gegeven door (30.52) en $\rho^E_{2,1} = -\rho^E_{1,2}$. De grootheid $\rho^E_{1,2}$ staat bekend als de *reflectiefactor van* FRESNEL *voor E-polarisatie*. Uit (30.51) en (30.54) blijkt, dat de elementen van de overdrachtsmatrix en van de verstrooiingsmatrix op eenvoudige wijze van deze reflectiefactor afhangen.

Het geval, dat de in het gebied $\mathscr{D}_1$ op het scheidingsvlak invallende golf $\{\mathbf{E}^+_1, \mathbf{H}^+_1\}$ een uniforme, vlakke golf is, zullen wij nader uitwerken. Substitutie van de eerder afgeleide resultaten in (30.52) leidt tot

$$\begin{aligned} \rho^E_{1,2} &= \frac{(\gamma_1/j\omega\mu_1)\cos(\theta^i_1) - (\gamma_2/j\omega\mu_2)\,[1-(\gamma_1^2/\gamma_2^2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}}{(\gamma_1/j\omega\mu_1)\cos(\theta^i_1) + (\gamma_2/j\omega\mu_2)\,[1-(\gamma_1^2/\gamma_2^2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(n_1/\mu_1)\cos(\theta^i_1) - (n_2/\mu_2)\,[1-(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}}{(n_1/\mu_1)\cos(\theta^i_1) + (n_2/\mu_2)\,[1-(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{30.55}$$

Onder bepaalde voorwaarden kan $\rho^E_{1,2}$ de waarde nul aannemen. De hoek van inval θ^i_1 waarbij dit gebeurt, wordt de *hoek van* BREWSTER *voor E-polarisatie* θ^E_B genoemd. In Fig. 70 en Fig. 71 zijn voor een aantal gevallen $|\rho^E_{1,2}|$ en $\arg(\rho^E_{1,2})$ als functie van θ^i_1 weergegeven. In die gevallen waarin totale terugkaatsing optreedt (n_1/n_2 reëel, $(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta^i_1) > 1$), is $|\rho^E_{1,2}| = 1$.

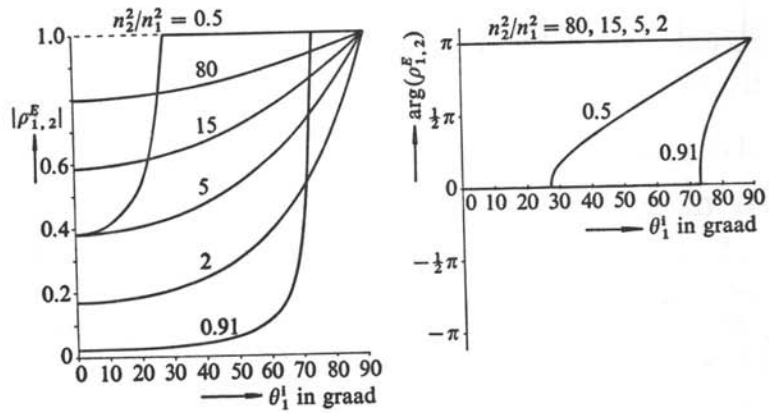


Fig. 70. De reflectiefactor van FRESNEL *voor E-polarisatie als functie van de hoek van inval (n_1/n_2 is reëel en $\mu_1 = \mu_2$).*

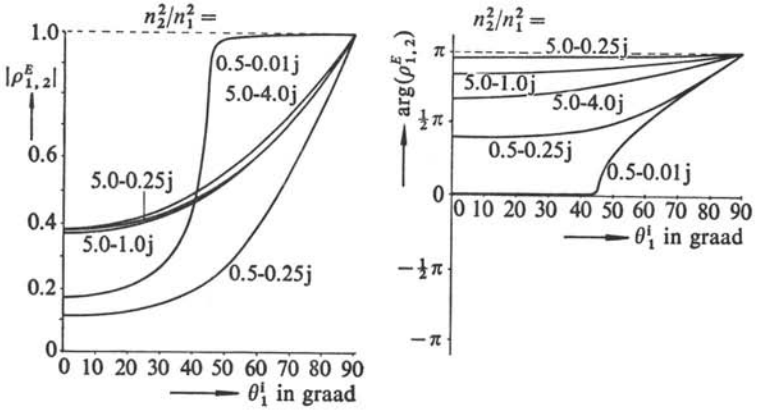


Fig. 71. De reflectiefactor van FRESNEL *voor E-polarisatie als functie van de hoek van inval (n_1/n_2 is complex en $\mu_1 = \mu_2$).*

(c) *Magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd evenwijdig aan het scheidingsvlak. De reflectiefactor van* FRESNEL *voor H-polarisatie*

De behandeling van dit geval verloopt geheel analoog met die van het onder (b) besproken geval. Indien van één van de vier optredende golven de magnetische veldsterkte lineair gepolariseerd is in een richting evenwijdig aan het scheidingsvlak tussen de twee media, zijn de magnetische veldsterkten van alle vier de optredende golven lineair gepolariseerd in deze richting. Van het te gebruiken Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij nu de y-as evenwijdig aan de gemeenschappelijke polarisatierichting van alle magnetische veldsterkten die in het vraagstuk een rol spelen. Dan is

$$\mathbf{h}_1^+ = h_{1,y}^+ \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{h}_1^- = h_{1,y}^- \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{h}_2^+ = h_{2,y}^+ \mathbf{i}_y, \quad \mathbf{h}_2^- = h_{2,y}^- \mathbf{i}_y. \tag{30.56}$$

Op grond van de in Par. 26 onder (b) behandelde theorie hebben dan de grootheden $\boldsymbol{\gamma}_1^+$, $\mathbf{e}_1^+$, $\boldsymbol{\gamma}_1^-$, $\mathbf{e}_1^-$, $\boldsymbol{\gamma}_2^+$, $\mathbf{e}_2^+$, $\boldsymbol{\gamma}_2^-$ en $\mathbf{e}_2^-$ alleen een x- en een z-component. De voorwaarde (30.25) gaat in dit geval over in

$$h_{1,y}^+ + h_{1,y}^- = h_{2,y}^+ + h_{2,y}^-, \tag{30.57}$$

terwijl onder toepassing van (28.8) de voorwaarde (30.24) overgaat in

$$Z_{1,z}(h_{1,y}^+ - h_{1,y}^-) = Z_{2,z}(h_{2,y}^+ - h_{2,y}^-), \tag{30.58}$$

waarin

$$Z_{1,z} = \gamma_{1,z}/(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1) \tag{30.59}$$

en

$$Z_{2,z} = \gamma_{2,z}/(\sigma_2+j\omega\varepsilon_2). \tag{30.60}$$

De vergelijkingen (30.57) en (30.58) hebben dezelfde structuur als (23.55) en (23.54). Als gevolg hiervan kunnen wij de resultaten met betrekking tot de overdrachtsmatrix en de verstrooiingsmatrix meteen uit de in Par. 23 onder (b) verkregen resultaten aflezen. De overdrachtsmatrix voor H-polarisatie $[T^H_{1\to 2}]$, betrokken op het vlak $z=0$ als referentievlak, volgt uit

$$\begin{bmatrix} h^-_{1,y} \\ h^+_{1,y} \end{bmatrix} = [T^H_{1\to 2}] \begin{bmatrix} h^-_{2,y} \\ h^+_{2,y} \end{bmatrix} \tag{30.61}$$

en is gegeven door (zie (23.60))

$$[T^H_{1\to 2}] = \frac{1}{1+\rho^H_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho^H_{1,2} \\ \rho^H_{1,2} & 1 \end{bmatrix}, \tag{30.62}$$

waarin (zie (23.58))

$$\rho^H_{1,2} = (Z_{1,z}-Z_{2,z})/(Z_{1,z}+Z_{2,z}) \tag{30.63}$$

de reflectiefactor voor H-polarisatie is. De verstrooiingsmatrix voor H-polarisatie $[S^H_{1\leftrightarrow 2}]$, betrokken op het vlak $z=0$ als referentievlak, volgt uit

$$\begin{bmatrix} h^-_{1,y} \\ h^+_{2,y} \end{bmatrix} = [S^H_{1\leftrightarrow 2}] \begin{bmatrix} h^+_{1,y} \\ h^-_{2,y} \end{bmatrix} \tag{30.64}$$

en is gegeven door (zie (23.61))

$$[S^H_{1\leftrightarrow 2}] = \begin{bmatrix} \rho^H_{1,2} & 1-\rho^H_{1,2} \\ 1-\rho^H_{2,1} & \rho^H_{2,1} \end{bmatrix}, \tag{30.65}$$

waarin $\rho^H_{1,2}$ is gegeven door (30.63) en $\rho^H_{2,1} = -\rho^H_{1,2}$. De grootheid $\rho^H_{1\,2}$ staat bekend als de *reflectiefactor van* FRESNEL *voor H-polarisatie*. Uit (30.62) en (30.65) blijkt, dat de elementen van de overdrachtsmatrix en van de verstrooiingsmatrix op eenvoudige wijze van deze reflectiefactor afhangen.

Het geval, dat de in het gebied $\mathscr{D}_1$ op het scheidingsvlak invallende golf $\{\mathbf{E}^+_1, \mathbf{H}^+_1\}$ een uniforme vlakke golf is, zullen wij nader uitwerken. Substitutie van de eerder afgeleide resultaten in (30.63) leidt tot

$$\rho^H_{1,2} = \frac{[\gamma_1/(\sigma_1+j\omega\varepsilon_1)]\cos(\theta^i_1) - [\gamma_2/(\sigma_2+j\omega\varepsilon_2)]\,[1-(\gamma^2_1/\gamma^2_2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}}{[\gamma_1/(\sigma_1+j\omega\varepsilon_1)]\cos(\theta^i_1) + [\gamma_2/(\sigma_2+j\omega\varepsilon_2)]\,[1-(\gamma^2_1/\gamma^2_2)\sin^2(\theta^i_1)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(\mu_1/n_1)\cos(\theta_1^i) - (\mu_2/n_2)\,[1-(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta_1^i)]^{\frac{1}{2}}}{(\mu_1/n_1)\cos(\theta_1^i) + (\mu_2/n_2)\,[1-(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta_1^i)]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (30.66)$$

Onder bepaalde voorwaarden kan $\rho_{1,2}^H$ de waarde nul aannemen. De hoek van inval θ_1^i waarbij dit gebeurt, wordt de *hoek van* BREWSTER *voor H-polarisatie* θ_B^H genoemd. In Fig. 72 en Fig. 73 zijn voor een aantal

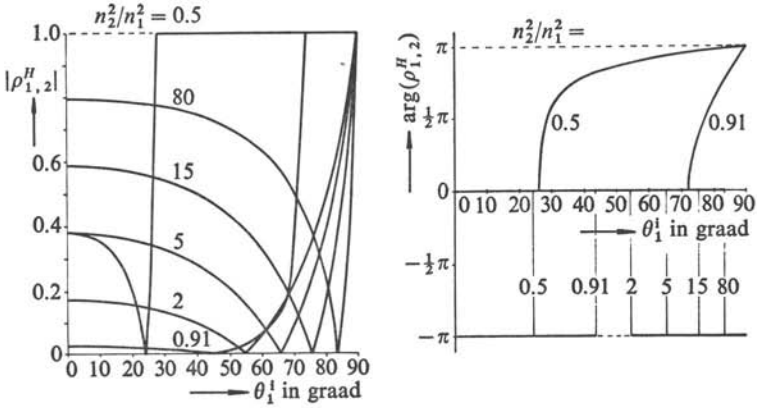


Fig. 72. De reflectiefactor van FRESNEL *voor H-polarisatie als functie van de hoek van inval (n_1/n_2 is reëel en $\mu_1 = \mu_2$).*

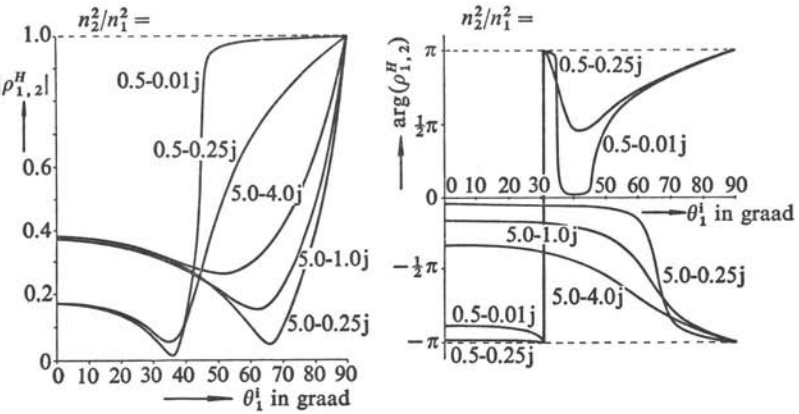


Fig. 73. De reflectiefactor van FRESNEL *voor H-polarisatie als functie van de hoek van inval (n_1/n_2 is complex en $\mu_1 = \mu_2$).*

gevallen $|\rho^H_{1,2}|$ en $\arg(\rho^H_{1,2})$ als functie van θ^i_1 weergegeven. In die gevallen waarin totale terugkaatsing optreedt (n_1/n_2 reëel, $(n_1^2/n_2^2)\sin^2(\theta^i_1) > 1$), is $|\rho^H_{1,2}| = 1$.

(d) *Betrekkingen tussen de z-componenten van de elektrische veldsterkte voor het algemene geval*

Wij keren terug tot de behandeling van het algemene geval en zullen eerst aantonen, dat de betrekkingen tussen $e^+_{1,z}$, $e^-_{1,z}$, $e^+_{2,z}$ en $e^-_{2,z}$ van eenvoudige aard zijn. Daartoe gebruiken wij de randvoorwaarde (30.25) en merken op, dat hieruit volgt

$$\boldsymbol{\gamma}_T \times (\mathbf{h}^+_{1,T} + \mathbf{h}^-_{1,T}) = \boldsymbol{\gamma}_T \times (\mathbf{h}^+_{2,T} + \mathbf{h}^-_{2,T}). \tag{30.67}$$

In dit resultaat substitueren wij voor iedere term van de gedaante $\boldsymbol{\gamma}_T \times \mathbf{h}_T$ de uitdrukking (28.7), waardoor (30.67) overgaat in

$$(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)(e^+_{1,z} + e^-_{1,z}) = (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)(e^+_{2,z} + e^-_{2,z}). \tag{30.68}$$

Vervolgens gebruiken wij de randvoorwaarde (30.24) en merken op, dat hieruit volgt

$$\boldsymbol{\gamma}_T \cdot (\mathbf{e}^+_{1,T} + \mathbf{e}^-_{1,T}) = \boldsymbol{\gamma}_T \cdot (\mathbf{e}^+_{2,T} + \mathbf{e}^-_{2,T}). \tag{30.69}$$

In dit resultaat substitueren wij voor iedere term van de gedaante $\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{e}_T$ de uit (28.12) volgende waarde, waardoor (30.69) overgaat in

$$\gamma_{1,z}(e^+_{1,z} - e^-_{1,z}) = \gamma_{2,z}(e^+_{2,z} - e^-_{2,z}). \tag{30.70}$$

De vergelijkingen (30.68) en (30.70) vertonen grote overeenkomst met (30.57) en (30.58); zij gaan hierin over als wij h_y vervangen door $(\sigma + j\omega\varepsilon)e_z$. Aan de hand van (30.61) kunnen wij dus besluiten tot de betrekking

$$\begin{bmatrix} (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, e^-_{1,z} \\ (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, e^+_{1,z} \end{bmatrix} = [T^H_{1\to 2}] \begin{bmatrix} (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, e^-_{2,z} \\ (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, e^+_{2,z} \end{bmatrix}, \tag{30.71}$$

waarin $[T^H_{1\to 2}]$ is gegeven door (30.62), en aan de hand van (30.64) tot de betrekking

$$\begin{bmatrix} (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, e^-_{1,z} \\ (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, e^+_{2,z} \end{bmatrix} = [S^H_{1\leftrightarrow 2}] \begin{bmatrix} (\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)\, e^+_{1,z} \\ (\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)\, e^-_{2,z} \end{bmatrix}, \tag{30.72}$$

waarin $[S^H_{1\leftrightarrow 2}]$ is gegeven door (30.65).

(e) *Betrekkingen tussen de z-componenten van de magnetische veldsterkte voor het algemene geval*

De behandeling van dit geval verloopt geheel analoog met die van het onder (d) besproken geval. Wij gebruiken de randvoorwaarde (30.24) en merken op, dat hieruit volgt

$$\gamma_T \times (\mathbf{e}^+_{1,T}+\mathbf{e}^-_{1,T}) = \gamma_T \times (\mathbf{e}^+_{2,T}+\mathbf{e}^-_{2,T}). \tag{30.73}$$

In dit resultaat substitueren wij voor iedere term van de gedaante $\gamma_T \times \mathbf{e}_T$ de uitdrukking (28.9), waardoor (30.73) overgaat in

$$j\omega\mu_1(h^+_{1,z}+h^-_{1,z}) = j\omega\mu_2(h^+_{2,z}+h^-_{2,z}). \tag{30.74}$$

Vervolgens gebruiken wij de randvoorwaarde (30.25) en merken op, dat hieruit volgt

$$\gamma_T \cdot (\mathbf{h}^+_{1,T}+\mathbf{h}^-_{1,T}) = \gamma_T \cdot (\mathbf{h}^+_{2,T}+\mathbf{h}^-_{2,T}). \tag{30.75}$$

In dit resultaat substitueren wij voor iedere term van de gedaante $\gamma_T \cdot \mathbf{h}_T$ de uit (28.13) volgende waarde, waardoor (30.75) overgaat in

$$\gamma_{1,z}(h^+_{1,z}-h^-_{1,z}) = \gamma_{2,z}(h^+_{2,z}-h^-_{2,z}). \tag{30.76}$$

De vergelijkingen (30.74) en (30.76) vertonen grote overeenkomst met (30.46) en (30.47); zij gaan hierin over als wij e_y vervangen door $j\omega\mu h_z$. Aan de hand van (30.50) kunnen wij dus besluiten tot de betrekking

$$\begin{bmatrix} j\omega\mu_1 h^-_{1,z} \\ j\omega\mu_1 h^+_{1,z} \end{bmatrix} = [T^E_{1\to 2}] \begin{bmatrix} j\omega\mu_2 h^-_{2,z} \\ j\omega\mu_2 h^+_{2,z} \end{bmatrix}, \tag{30.77}$$

waarin $[T^E_{1\to 2}]$ is gegeven door (30.51), en aan de hand van (30.53) tot de betrekking

$$\begin{bmatrix} j\omega\mu_1 h^-_{1,z} \\ j\omega\mu_2 h^+_{2,z} \end{bmatrix} = [S^E_{1\leftrightarrow 2}] \begin{bmatrix} j\omega\mu_1 h^+_{1,z} \\ j\omega\mu_2 h^-_{2,z} \end{bmatrix}, \tag{30.78}$$

waarin $[S^E_{1\leftrightarrow 2}]$ is gegeven door (30.54).

(f) *Betrekkingen tussen de transversale componenten van de elektrische veldsterkte voor het algemene geval**

De betrekkingen tussen $\mathbf{e}^+_{1,T}$, $\mathbf{e}^-_{1,T}$, $\mathbf{e}^+_{2,T}$ en $\mathbf{e}^-_{2,T}$ zijn aanzienlijk gecompliceerder dan de onder (d) besproken betrekkingen tussen de z-com-

* De schrijver wil hier gaarne Prof. dr.-ing. H. J. Butterweck, afdeling der Elektrotechniek, Technische Hogeschool Eindhoven, bedanken voor zijn bijdrage tot de onder (f) en (g) ontwikkelde theorie.

ponenten van de elektrische veldsterkte. Om tot de gezochte betrekkingen te geraken, gebruiken wij eerst de randvoorwaarde (30.24):

$$\mathbf{e}^{+}_{1,T}+\mathbf{e}^{-}_{1,T} = \mathbf{e}^{+}_{2,T}+\mathbf{e}^{-}_{2,T}. \tag{30.79}$$

Vervolgens gebruiken wij de randvoorwaarde (30.25) en substitueren hierin de uit (28.10) volgende uitdrukking voor $\mathbf{h}_T$. Het resultaat wordt vectorieel met $\mathbf{i}_z$ vermenigvuldigd en gaat na enige herleiding over in

$$\begin{aligned} &Y_{1,z}(\mathbf{e}^{+}_{1,T}-\mathbf{e}^{-}_{1,T}) - (j\omega\mu_1)^{-1}\,(e^{+}_{1,z}+e^{-}_{1,z})\,\boldsymbol{\gamma}_T \\ &= Y_{2,z}(\mathbf{e}^{+}_{2,T}-\mathbf{e}^{-}_{2,T}) - (j\omega\mu_2)^{-1}\,(e^{+}_{2,z}+e^{-}_{2,z})\,\boldsymbol{\gamma}_T. \end{aligned} \tag{30.80}$$

Om de overdrachtsmatrix voor de transversale componenten van de elektrische veldsterkte te bepalen, dienen de volgende stappen te worden uitgevoerd:

(T_1) In (30.79) en (30.80) worden $\mathbf{e}^{-}_{1,T}$ en $\mathbf{e}^{+}_{1,T}$ als onbekenden beschouwd en uit deze vergelijkingen opgelost.
(T_2) Met behulp van (30.71) worden $e^{-}_{1,z}$ en $e^{+}_{1,z}$ uitgedrukt in $e^{-}_{2,z}$ en $e^{+}_{2,z}$.
(T_3) Met behulp van (28.12) wordt $e^{-}_{2,z}$ vervangen door $(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{e}^{-}_{2,T})/\gamma_{2,z}$ en $e^{+}_{2,z}$ door $-(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{e}^{+}_{2,T})/\gamma_{2,z}$.
(T_4) Het resultaat wordt overeenkomstig de regels die voor het opstellen van de overdrachtsmatrix gelden, gerangschikt als een matrixvergelijking.

De verkregen overdrachtsmatrix is een 4×4 matrix en drukt $\{e^{-}_{1,x}, e^{-}_{1,y}, e^{+}_{1,x}, e^{+}_{1,y}\}$ uit in $\{e^{-}_{2,x}, e^{-}_{2,y}, e^{+}_{2,x}, e^{+}_{2,y}\}$.

Om de verstrooiingsmatrix van de transversale componenten van de elektrische veldsterkte te bepalen, dienen de volgende stappen te worden uitgevoerd:

(S_1) In (30.79) en (30.80) worden $\mathbf{e}^{-}_{1,T}$ en $\mathbf{e}^{+}_{2,T}$ als onbekenden beschouwd en uit deze vergelijkingen opgelost.
(S_2) Met behulp van (30.72) worden $e^{-}_{1,z}$ en $e^{+}_{2,z}$ uitgedrukt in $e^{+}_{1,z}$ en $e^{-}_{2,z}$.
(S_3) Met behulp van (28.12) wordt $e^{+}_{1,z}$ vervangen door $-(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{e}^{+}_{1,T})/\gamma_{1,z}$ en $e^{-}_{2,z}$ door $(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{e}^{-}_{2,T})/\gamma_{2,z}$.
(S_4) Het resultaat wordt overeenkomstig de regels die voor het opstellen van de verstrooiingsmatrix gelden, gerangschikt als een matrixvergelijking.

De verkregen verstrooiingsmatrix is een 4×4 matrix en drukt $\{e^{-}_{1,x}, e^{-}_{1,y}, e^{+}_{2,x}, e^{+}_{2,y}\}$ uit in $\{e^{+}_{1,x}, e^{+}_{1,y}, e^{-}_{2,x}, e^{-}_{2,y}\}$.

Op de hierboven aangegeven manier worden de 4×4 overdrachtsmatrix en de 4×4 verstrooiingsmatrix verkregen door achtereenvolgens

stappen uit te voeren die niet meer eisen dan het bekend zijn van de eerder berekende 2×2 overdrachts- en verstrooiingsmatrices. In het totale resultaat spelen derhalve $\rho^E_{1,2}$ en $\rho^H_{1,2}$ weer de centrale rol.

(g) *Betrekkingen tussen de transversale componenten van de magnetische veldsterkte voor het algemene geval*

Ook de betrekkingen tussen $\mathbf{h}^+_{1,T}$, $\mathbf{h}^-_{1,T}$, $\mathbf{h}^+_{2,T}$ en $\mathbf{h}^-_{2,T}$ zijn aanzienlijk gecompliceerder dan de onder (e) besproken betrekkingen tussen de z-componenten van de magnetische veldsterkte. De behandeling verloopt geheel analoog met het onder (f) besproken geval. Wij gebruiken eerst de randvoorwaarde (30.25):

$$\mathbf{h}^+_{1,T}+\mathbf{h}^-_{1,T} = \mathbf{h}^+_{2,T}+\mathbf{h}^-_{2,T}. \tag{30.81}$$

Vervolgens gebruiken wij de randvoorwaarde (30.24) en substitueren hierin de uit (28.8) volgende uitdrukking voor $\mathbf{e}_T$. Het resultaat wordt vectorieel met $\mathbf{i}_z$ vermenigvuldigd en gaat na enige herleiding over in

$$\begin{aligned} &Z_{1,z}(\mathbf{h}^+_{1,T}-\mathbf{h}^-_{1,T}) - (\sigma_1+j\omega\varepsilon_1)^{-1}\,(h^+_{1,z}+h^-_{1,z})\,\boldsymbol{\gamma}_T \\ &= Z_{2,z}(\mathbf{h}^+_{2,T}-\mathbf{h}^-_{2,T}) - (\sigma_2+j\omega\varepsilon_2)^{-1}\,(h^+_{2,z}+h^-_{2,z})\,\boldsymbol{\gamma}_T. \end{aligned} \tag{30.82}$$

Om de overdrachtsmatrix voor de transversale componenten van de magnetische veldsterkte te bepalen, dienen de volgende stappen te worden uitgevoerd:

(T_1) In (30.81) en (30.82) worden $\mathbf{h}^-_{1,T}$ en $\mathbf{h}^+_{1,T}$ als onbekenden beschouwd en uit deze vergelijkingen opgelost.

(T_2) Met behulp van (30.77) worden $h^-_{1,z}$ en $h^+_{1,z}$ uitgedrukt in $h^-_{2,z}$ en $h^+_{2,z}$.

(T_3) Met behulp van (28.13) wordt $h^-_{2,z}$ vervangen door $(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{h}^-_{2,T})/\gamma_{2,z}$ en $h^+_{2,z}$ door $-(\boldsymbol{\gamma}_T\cdot\mathbf{h}^+_{2,T})/\gamma_{2,z}$.

(T_4) Het resultaat wordt overeenkomstig de regels die voor het opstellen van de overdrachtsmatrix gelden, gerangschikt als een matrixvergelijking.

De verkregen overdrachtsmatrix is een 4×4 matrix en drukt $\{h^-_{1,x}, h^-_{1,y}, h^+_{1,x}, h^+_{1,y}\}$ uit in $\{h^-_{2,x}, h^-_{2,y}, h^+_{2,x}, h^+_{2,y}\}$.

Om de verstrooiingsmatrix van de transversale componenten van de magnetische veldsterkte te bepalen, dienen de volgende stappen te worden uitgevoerd:

(S_1) In (30.81) en (30.82) worden $\mathbf{h}^-_{1,T}$ en $\mathbf{h}^+_{2,T}$ als onbekenden beschouwd en uit deze vergelijkingen opgelost.

(S_2) Met behulp van (30.78) worden $h^-_{1,z}$ en $h^+_{2,z}$ uitgedrukt in $h^+_{1,z}$ en $h^-_{2,z}$.

(S_3) Met behulp van (28.13) wordt $h^+_{1,z}$ vervangen door $-(\gamma_T \cdot \mathbf{h}^+_{1,T})/\gamma_{1,z}$ en $h^-_{2,z}$ door $(\gamma_T \cdot \mathbf{h}^-_{2,T})/\gamma_{2,z}$.

(S_4) Het resultaat wordt overeenkomstig de regels die voor het opstellen van de verstrooiingsmatrix gelden, gerangschikt als een matrixvergelijking.

De verkregen verstrooiingsmatrix is een 4×4 matrix en drukt $\{h^-_{1,x}, h^-_{1,y}, h^+_{2,x}, h^+_{2,y}\}$ uit in $\{h^+_{1,x}, h^+_{1,y}, h^-_{2,x}, h^-_{2,y}\}$.

Wat de berekening van de hierboven verkregen 4×4 overdrachtsmatrix en de 4×4 verstrooiingsmatrix betreft, is dezelfde opmerking van toepassing als die aan het eind onder (f) is gemaakt.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 30.1. Bepaal uit Vergelijking (30.55) de uitdrukking voor de reflectiefactor van FRESNEL voor een uniforme, E-gepolariseerde, invallende golf als $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, terwijl ε_1, μ_1, ε_2 en μ_2 reëel en positief zijn. Onderstel, dat er geen totale terugkaatsing optreedt.
Antwoord:

$$\rho^E_{1,2} = \frac{(\varepsilon_1/\mu_1)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^i_1) - (\varepsilon_2/\mu_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^t_2)}{(\varepsilon_1/\mu_1)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^i_1) + (\varepsilon_2/\mu_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^t_2)}.$$

Vraagstuk 30.2. Bepaal voor het in Vraagstuk 30.1 beschouwde geval de uitdrukking voor $\tan(\theta^E_B)$, waarin θ^E_B de hoek van BREWSTER voor E-polarisatie is. (Aanwijzing: stel de teller van het antwoord van Vraagstuk 30.1 gelijk aan nul, gebruik de wet van SNEL (SNELLIUS) voor de doorlating en elimineer θ^t_2.)
Antwoord:

$$\tan(\theta^E_B) = \left(\frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Opmerking: θ^E_B bestaat uiteraard alleen als het rechterlid van het antwoord reëel is.)

Vraagstuk 30.3. Bepaal uit Vergelijking (30.66) de uitdrukking voor de reflectiefactor van FRESNEL voor een uniforme, H-gepolariseerde, invallende golf als $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, terwijl ε_1, μ_1, ε_2 en μ_2 reëel en positief zijn. Onderstel, dat er geen totale terugkaatsing optreedt.
Antwoord:

$$\rho^H_{1,2} = \frac{(\mu_1/\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^i_1) - (\mu_2/\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^t_2)}{(\mu_1/\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^i_1) + (\mu_2/\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta^t_2)}.$$

Vraagstuk 30.4. Bepaal voor het in Vraagstuk 30.3 beschouwde geval de uitdrukking voor $\tan(\theta^H_B)$, waarin θ^H_B de hoek van BREWSTER voor H-polarisatie is. (Aanwijzing: stel de teller van het antwoord van Vraagstuk 30.3 gelijk aan nul, gebruik de wet van SNEL (SNELLIUS) voor de doorlating en elimineer θ^t_2.)

Antwoord:

$$\tan(\theta_B^H) = \left(\frac{\mu_2/\mu_1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - \mu_2/\mu_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Opmerking: θ_B^H bestaat uiteraard alleen als het rechterlid van het antwoord reëel is.)

Vraagstuk 30.5. Bepaal de antwoorden van de Vraagstukken 30.2 en 30.4 als $\mu_1 = \mu_2$.
Antwoord: θ_B^E bestaat niet; $\tan(\theta_B^H) = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$.

Vraagstuk 30.6. Bewijs, dat voor het in Vraagstuk 30.5 beschouwde geval geldt $\theta_1^i + \theta_2^t = \pi/2$ als $\theta_1^i = \theta_B^H$.

Vraagstuk 30.7. Bepaal voor het in Vraagstuk 30.5 beschouwde geval (a) het interval waarin θ_B^H ligt als $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, (b) het interval waarin θ_B^H ligt als $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, (c) de waarde van θ_B^H als $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 3$, (d) de waarde van θ_B^H als $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1/3$.
Antwoord: (a) $\pi/4 < \theta_B^H < \pi/2$; (b) $0 < \theta_B^H < \pi/4$; (c) $\theta_B^H = \pi/3$ rad; (d) $\theta_B^H = \pi/6$ rad.

Vraagstuk 30.8. Bepaal uit Vergelijking (30.52) de limietwaarde van $\rho_{1,2}^E$ als $\sigma_2 \to \infty$.
Antwoord: $\lim_{\sigma_2 \to \infty} \rho_{1,2}^E = -1$.
(Opmerking: vergelijk dit antwoord met Vergelijking (29.22).)

Vraagstuk 30.9. Bepaal uit Vergelijking (30.63) de limietwaarde van $\rho_{1,2}^H$ als $\sigma_2 \to \infty$.
Antwoord: $\lim_{\sigma_2 \to \infty} \rho_{1,2}^H = 1$.
(Opmerking: vergelijk dit antwoord met Vergelijking (29.27).)

31. Elektromagnetische stralen in het frequentiedomein

In deze paragraaf geven wij een inleiding tot de theorie van de *elektromagnetische stralen* (Eng.: electromagnetic rays). Hieronder verstaat men benaderde oplossingen van de elektromagnetische veldvergelijkingen in een bronvrij gebied, die een golfachtig karakter vertonen en in een aantal opzichten lijken op de uit de geometrische optica bekende lichtstralen. De analyse geschiedt in het frequentiedomein*; de gebruikte complexe tijdfactor is $\exp(j\omega t)$. De benadering is — onder bepaalde nevenvoorwaarden — geldig voor $\omega \to \infty$ en staat bekend als de *stralenbenadering* (Eng.: ray approximation).

Het onderzoek beperken wij tot stralen in een medium waarvan de constitutieve vergelijkingen als volgt luiden

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},\omega) = \sigma(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{31.1}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{31.2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega) = \mu(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega). \tag{31.3}$$

Het medium is derhalve locaal reagerend, tijdinvariant, lineair en isotroop (zie Par. 10). De veldgrootheden van de te onderzoeken stralen voldoen aan de elektromagnetische veldvergelijkingen in het frequentiedomein (zie (18.1) en (18.2))

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}, \tag{31.4}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}. \tag{31.5}$$

Uit (18.3) t/m (18.5) volgt verder

$$\mathrm{div}(\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) = 0, \tag{31.6}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{31.7}$$

* Het teken ^ ter aanduiding van een grootheid in het frequentiedomein is in deze paragraaf daar waar dit geen aanleiding tot misverstand kan geven, weggelaten.

Wij zoeken nu naar oplossingen van (31.1) t/m (31.7) die de gedaante

$$\{\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{J},\mathbf{D},\mathbf{B}\} = \{\mathbf{e},\ \mathbf{h},\ \mathbf{j},\ \mathbf{d},\ \mathbf{b}\}\ \exp[-\mathrm{j}(\omega/c_0)\ L] \tag{31.8}$$

hebben, waarin $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{r})$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{r})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r})$ en $L = L(\mathbf{r})$ nader te bepalen functies van de plaats zijn. Opgemerkt wordt, dat (31.8) overgaat in de overeenkomstige betrekking voor een driedimensionale, vlakke golf als $\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{j}, \mathbf{d}$ en $\mathbf{b}$ constante vectoren zijn en $L = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}$, waarin $\mathbf{n}$ de in (26.48) ingevoerde vectoriële complexe brekingsindex is. Substitutie van (31.8) in (31.1) t/m (31.7) en delen door de factor $\exp[-\mathrm{j}(\omega/c_0)L]$, die alle termen gemeenschappelijk hebben en die nooit de waarde nul heeft, geeft het volgende stelsel vergelijkingen

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{e}, \tag{31.9}$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon\mathbf{e}, \tag{31.10}$$

$$\mathbf{b} = \mu\mathbf{h}, \tag{31.11}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{h} - \mathrm{j}(\omega/c_0)\ (\mathbf{grad}\ L) \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \mathrm{j}\omega\mathbf{d}, \tag{31.12}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{e} - \mathrm{j}(\omega/c_0)\ (\mathbf{grad}\ L) \times \mathbf{e} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{b}, \tag{31.13}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{j}+\mathrm{j}\omega\mathbf{d}) - \mathrm{j}(\omega/c_0)\ (\mathbf{grad}\ L)\cdot(\mathbf{j}+\mathrm{j}\omega\mathbf{d}) = 0, \tag{31.14}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{b} - \mathrm{j}(\omega/c_0)\ (\mathbf{grad}\ L)\cdot\mathbf{b} = 0. \tag{31.15}$$

Wij onderstellen nu, dat een voor $\omega \to \infty$ geldige benadering voor deze vergelijkingen wordt verkregen door in (31.12) t/m (31.15) de termen die geen factor ω in hun coëfficiënt hebben, te verwaarlozen ten opzichte van de termen die de factor ω wel in hun coëfficiënt hebben. In de resulterende vergelijkingen delen wij door $\mathrm{j}\omega/c_0$ en gebruiken (31.10) en (31.11) (de grootheid $\mathbf{j}$ komt niet meer voor). Deze handelwijze leidt tot

$$(\mathbf{grad}\ L) \times \mathbf{h} + c_0\varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}, \tag{31.16}$$

$$(\mathbf{grad}\ L) \times \mathbf{e} - c_0\mu\mathbf{h} = \mathbf{0}, \tag{31.17}$$

$$(\mathbf{grad}\ L)\cdot\mathbf{e} = 0, \tag{31.18}$$

$$(\mathbf{grad}\ L)\cdot\mathbf{h} = 0, \tag{31.19}$$

waarbij in (31.16) de hoogfrequente benadering voor de permittiviteit en in (31.17) de hoogfrequente benadering voor de permeabiliteit voorkomt. Voor deze grootheden hebben wij geen apart symbool ingevoerd, doch wederom ε, respectievelijk μ, geschreven; ook deze ε en μ kunnen complex zijn, namelijk indien het medium bij hoge frequenties verliezen heeft. Indien de aard van de frequentie-afhankelijkheid van ε en μ voor

$\omega \to \infty$ in de beschouwing geen rol speelt, zullen wij $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ en $\mu = \mu(\mathbf{r})$ in plaats van $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r},\omega)$ en $\mu = \mu(\mathbf{r},\omega)$ schrijven. De benadering die is uitgevoerd, houdt in, dat **e**, **h**, **d**, **b** en **grad** L langzaam met de plaats veranderen en dat ε en μ niet de waarde nul hebben. Opgemerkt wordt, dat scalaire vermenigvuldiging van (31.16) met **grad** L tot (31.18) leidt en scalaire vermenigvuldiging van (31.17) met **grad** L tot (31.19); in dit opzicht is dus de benadering consistent. Scalaire vermenigvuldiging van (31.16) met **h** of van (31.17) met **e** leidt nog tot de betrekking

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{31.20}$$

In ieder punt van een gebied waar de stralenbenadering geldig is, zijn (31.16) t/m (31.19) op te vatten als lineaire, algebraïsche vergelijkingen in de kentallen van **e** en **h**, waarin **grad** L zodanig dient te worden bepaald, dat een oplossing met $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ mogelijk is. Om de voorwaarde waaraan **grad** L moet voldoen, af te leiden, elimineren wij **h** uit (31.16) en (31.17). Dit geeft

$$(\mathbf{grad}\, L) \times [(\mathbf{grad}\, L) \times \mathbf{e}] + c_0^2 \varepsilon\mu \mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{31.21}$$

Met behulp van de vectoriële identiteit

$$(\mathbf{grad}\, L) \times [(\mathbf{grad}\, L) \times \mathbf{e}]$$

$$= [\mathbf{e}\cdot(\mathbf{grad}\, L)]\ \mathbf{grad}\ L - [(\mathbf{grad}\, L)\cdot(\mathbf{grad}\, L)]\ \mathbf{e} \tag{31.22}$$

en met gebruikmaking van (31.18) is (31.21) te herleiden tot

$$[(\mathbf{grad}\, L)\cdot(\mathbf{grad}\, L) - c_0^2 \varepsilon\mu]\ \mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{31.23}$$

Voor een oplossing met $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ moet dus **grad** L aan de vergelijking

$$(\mathbf{grad}\, L)\cdot(\mathbf{grad}\, L) = c_0^2 \varepsilon\mu \tag{31.24}$$

voldoen. Deze vergelijking komt ook te voorschijn als **e** uit (31.16) en (31.17) wordt geëlimineerd en van (31.19) gebruik wordt gemaakt. De in (31.8) ingevoerde functie $L = L(\mathbf{r})$, die aan (31.24) moet voldoen, staat bekend als de *eikonaal* of *beeldfunctie*; (31.24) staat bekend als de *eikonaalvergelijking*. Daar $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ en $\mu = \mu(\mathbf{r})$ gegeven functies van de plaatscoördinaten zijn, is (31.24) een niet-lineaire, partiële differentiaalvergelijking ter bepaling van $L = L(\mathbf{r})$. Oplossingen van deze vergelijking zullen wij langs indirecte weg construeren.

Om de structuur van de verkregen benaderde oplossingen verder te analyseren, splitsen wij de complexe eikonaal in zijn reële en imaginaire deel en stellen

$$L = L' - \mathrm{j}L'', \tag{31.25}$$

waarin $L' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(L)$ en $L'' \stackrel{\text{def}}{=} -\mathrm{Im}(L)$. Substitutie van (31.25) in de propagatiefactor $\exp[-\mathrm{j}(\omega/c_0)L]$ geeft

$$\exp[-\mathrm{j}(\omega/c_0)\,L] = \exp[-(\omega/c_0)\,L'']\exp[-\mathrm{j}(\omega/c_0)\,L']. \tag{31.26}$$

Hieruit volgt, dat de oppervlakken $L'' = \textit{constante}$ de oppervlakken van gelijke amplitude zijn en de oppervlakken $L' = \textit{constante}$ de oppervlakken van gelijke fase. Verder stellen wij

$$\mathbf{n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{grad}\, L, \tag{31.27}$$

waarin $\mathbf{n}$ de *vectoriële complexe brekingsindex van de elektromagnetische straal* wordt genoemd. Splitsen van $\mathbf{n}$ in zijn reële en imaginaire deel via (zie (26.49))

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \mathrm{j}\mathbf{n}'', \tag{31.28}$$

waarin $\mathbf{n}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(\mathbf{n})$ en $\mathbf{n}'' \stackrel{\text{def}}{=} -\mathrm{Im}(\mathbf{n})$, en substitutie van (31.25) en (31.28) in (31.27) leidt tot

$$\mathbf{n}' = \mathbf{grad}\, L' \quad \text{en} \quad \mathbf{n}'' = \mathbf{grad}\, L''. \tag{31.29}$$

Hieruit volgt, dat in ieder punt van het beschouwde gebied de (reële) vector $\mathbf{n}'$ loodrecht staat op het door dat punt gaande oppervlak van gelijke fase en de (reële) vector $\mathbf{n}''$ loodrecht op het door dat punt gaande oppervlak van gelijke amplitude. Substitutie van (31.27) in (31.24) geeft

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = c_0^2\varepsilon\mu, \tag{31.30}$$

hetgeen met gebruik van (31.28) overgaat in

$$\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n}' - \mathbf{n}''\cdot\mathbf{n}'' - 2\mathrm{j}\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n}'' = c_0^2\varepsilon\mu = \varepsilon_r\mu_r. \tag{31.31}$$

Deze vergelijking is van dezelfde gedaante als (26.52), waardoor het aanduiden van $\mathbf{n}$ als vectoriële complexe brekingsindex is gerechtvaardigd. Substitutie van (31.27) in (31.16) t/m (31.19) geeft

$$\mathbf{n}\times\mathbf{h} + c_0\varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}, \tag{31.32}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{e} - c_0\mu\mathbf{h} = \mathbf{0}, \tag{31.33}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e} = 0, \tag{31.34}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{31.35}$$

Deze vergelijkingen zijn van dezelfde gedaante als (26.23) t/m (26.26), nadat hierin (26.48) is gesubstitueerd. Dit alles leidt tot de slotsom, dat in ieder punt van een gebied waar de stralenbenadering geldig is, de onderlinge betrekkingen tussen $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ en $\mathbf{n}$ dezelfde zijn als die voor een

driedimensionale vlakke golf. Dit feit brengt men ook wel tot uitdrukking door te zeggen, dat een elektromagnetische straal zich locaal als een elektromagnetische vlakke golf gedraagt.

In het algemeen hebben voor een straal $\mathbf{n}'$ en $\mathbf{n}''$ niet dezelfde richting; de straal noemen wij dan niet-uniform. Indien voor een straal $\mathbf{n}'$ en $\mathbf{n}''$ wel dezelfde richting hebben, noemen wij de straal uniform. Een niet-uniforme straal gedraagt zich locaal als een niet-uniforme vlakke golf; een uniforme straal gedraagt zich locaal als een uniforme vlakke golf. Nadat voor een bepaalde straal $\mathbf{n}$ uit (31.30) is berekend, kan voor deze straal de eikonaal berekend worden door gebruik te maken van de betrekking (zie (B. 44))

$$L(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}}) - L(\mathbf{r}_{\mathscr{P}}) = \int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{grad}\, L)\, \mathrm{d}s, \tag{31.36}$$

waarin $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$ twee willekeurige punten zijn in het gebied waar de stralenbenadering geldig is. Het resultaat in het rechterlid van (31.36) hangt alleen af van de keuze van $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$, maar is onafhankelijk van de gevolgde integratieweg. Substitutie van (31.27) in (31.36) geeft

$$L(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}}) - L(\mathbf{r}_{\mathscr{P}}) = \int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\, \mathrm{d}s. \tag{31.37}$$

In het kader van een algemene theorie zijn er weinig verdergaande conclusies te trekken. Op enkele aspecten die op uniforme elektromagnetische stralen betrekking hebben, gaan wij hieronder verder in.

(a) *De baan van een uniforme, elektromagnetische straal*

Voor een uniforme, elektromagnetische straal geldt $\mathbf{n} = n\mathbf{s}$, waarin $\mathbf{s}$ de (reële) eenheidsvector in de voortplantingsrichting van de straal is en n de (scalaire) complexe brekingsindex van de straal voorstelt; $\mathbf{s}$ en n zijn plaatsafhankelijk. Substitutie in (31.27) geeft

$$\mathbf{grad}\, L = n\mathbf{s} \tag{31.38}$$

en substitutie in (31.30) leidt, daar $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = 1$, tot

$$n = c_0(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon_r\mu_r)^{\frac{1}{2}}. \tag{31.39}$$

Voor de betrekkingen tussen $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ en $\mathbf{s}$ voor een uniforme, elektromagnetische straal verkrijgen wij uit (31.32) t/m (31.35)

$$n\mathbf{s}\times\mathbf{h} + c_0\varepsilon\mathbf{e} = \mathbf{0}, \tag{31.40}$$

$$n\mathbf{s}\times\mathbf{e} - c_0\mu\mathbf{h} = \mathbf{0}, \tag{31.41}$$

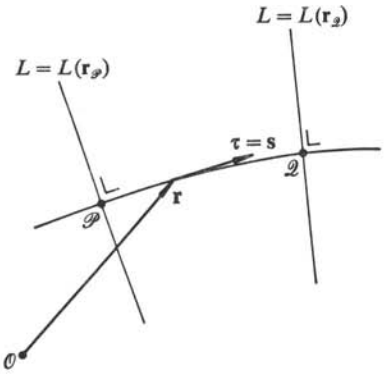


Fig. 74. De baan van een uniforme, elektromagnetische straal.

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{e} = 0, \tag{31.42}$$

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{h} = 0. \tag{31.43}$$

Uit (31.42) en (31.43) volgt, dat een uniforme, elektromagnetische straal in ieder punt transversaal is.

Als de *baan van een uniforme, elektromagnetische straal* (Eng.: ray trajectory) definiëren wij nu een zodanige ruimtekromme, dat in ieder punt de eenheidsvector $\boldsymbol{\tau}$ langs de raaklijn samenvalt met de eenheidsvector $\mathbf{s}$ in de voortplantingsrichting van de straal (Fig. 74). De baan ontstaat dus door de straal in zijn voortplantingsrichting te vervolgen. Laat

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \tag{31.44}$$

de parametervoorstelling zijn van de baan van een uniforme straal met de booglengte s langs de baan als parameter $(\mathrm{d}s = [(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2]^{\frac{1}{2}} > 0)$. Uit de theorie van de ruimtekrommen is bekend, dat de eenheidsvector $\boldsymbol{\tau}$ langs de raaklijn aan de kromme uit (31.44) volgt via de betrekking

$$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}_s\mathbf{r}. \tag{31.45}$$

Daar (31.44) de baan van een straal moet voorstellen, geldt $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{s}$, zodat uit (31.38) en (31.45) volgt

$$n\,\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{grad}\,L. \tag{31.46}$$

Toepassen van de operator $\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla$ op linker- en rechterlid van (31.46) en

gebruik maken van

$$(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\,\mathbf{grad}\,L = \mathbf{grad}\,[(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\,L] = \mathbf{grad}\,[\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{grad}\,L]$$
$$= \mathbf{grad}\,[\mathbf{s}\cdot\mathbf{grad}\,L] = \mathbf{grad}\,[\mathbf{s}\cdot(n\mathbf{s})]$$
$$= \mathbf{grad}\,n \tag{31.47}$$

geeft

$$\mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,n\,. \tag{31.48}$$

Met behulp van de betrekking $n\,\mathbf{grad}\,n = \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}(n^2)$ is deze vergelijking te herschrijven als

$$n\mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{grad}\,n^2. \tag{31.49}$$

Aan de differentiaalvergelijkingen (31.48) en (31.49), die van de tweede orde zijn, voldoen de banen van alle uniforme, elektromagnetische stralen. Voor het beschouwde medium mag men in deze vergelijkingen desgewenst n vervangen door $(\varepsilon_r\mu_r)^{\frac{1}{2}}$. Om nu een bepaalde baan van een elektromagnetische straal te construeren, moeten er nog twee gegevens bekend zijn. Hiervoor kunnen dienen: het beginpunt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ en de beginrichting $\mathbf{s}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{s}_0$ van de baan van de desbetreffende straal. De baankromme kan daarna uit (31.48) of (31.49) via een analytische, numerieke of grafische methode worden bepaald. Omgekeerd kunnen (31.48) en (31.49) worden gebruikt om af te leiden welk verloop de functie $\varepsilon_r\mu_r$ als functie van de plaatscoördinaten moet hebben om banen van een bepaalde vorm mogelijk te maken.

Tot slot merken wij op, dat in een homogeen gebied van het beschouwde medium (31.48) en (31.49) overgaan in

$$\mathrm{d}_s^2\mathbf{r} = \mathbf{0}, \tag{31.50}$$

met als oplossing

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + (s-s_0)\,\mathbf{s}_0\,, \tag{31.51}$$

als $s = s_0$ correspondeert met $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Vergelijking (31.51) is de parametervoorstelling van een rechte lijn: in een homogeen gebied van het beschouwde medium zijn de banen van uniforme, elektromagnetische stralen derhalve rechte lijnen.

(b) *Het transport van vermogen langs een uniforme, elektromagnetische straal*

Met behulp van de onder (a) verkregen resultaten is voor een uniforme straal de algemene uitdrukking voor de over een periode in de tijd

gemiddelde oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom $\langle \mathbf{S} \rangle_T$ te vereenvoudigen. Met behulp van (31.40) t/m (31.43) is af te leiden, dat

$$\mathbf{e} \times \mathbf{h}^* = (\varepsilon^*/\mu^*)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \mathbf{s} = (\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) \mathbf{s}. \tag{31.52}$$

Hiermee wordt

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = I\mathbf{s}, \tag{31.53}$$

met

$$I = \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}(\varepsilon^*/\mu^*)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \exp[-2(\omega/c_0) L''], \tag{31.54}$$

of

$$I = \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}(\mu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*) \exp[-2(\omega/c_0) L'']. \tag{31.55}$$

In ieder punt van een uniforme elektromagnetische straal is de over een periode in de tijd gemiddelde vector van POYNTING derhalve gericht langs de voortplantingsrichting van de straal, terwijl de via (31.53) gedefinieerde intensiteit I wordt gegeven door (31.54) of (31.55).

Voor een verdergaande behandeling van de theorie van elektromagnetische stralen verwijzen wij naar de literatuur (BORN and WOLF[33], FELSEN and MARCUVITZ[34]).

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 31.1. Geef de uitdrukking voor de over een periode in de tijd gemiddelde oppervlaktedichtheid van de vermogensstroom voor een willekeurige elektromagnetische straal.
Antwoord: $\langle \mathbf{S} \rangle_T = \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}(\mathbf{e} \times \mathbf{h}^*) \exp[-2(\omega/c_0) L'']$.

Vraagstuk 31.2. Laat $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ de parametervoorstelling van een ruimtekromme zijn met de booglengte s langs de kromme als parameter. Bewijs, dat de eenheidsvector langs de raaklijn aan de kromme, in de richting van toenemende s, is gegeven door $\boldsymbol{\tau} = (\mathrm{d}_s x)\mathbf{i}_x + (\mathrm{d}_s y)\mathbf{i}_y + (\mathrm{d}_s z)\mathbf{i}_z$ en dat voor een willekeurige, differentieerbare functie $f = f(s)$ geldt $\mathrm{d}_s f = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) f$.

Vraagstuk 31.3. Schrijf de vectoriële differentiaalvergelijking (31.48) voor de baan van een elektromagnetische straal uit in haar Cartesiaanse kentallen.
Antwoord: $\mathrm{d}_s(n \mathrm{d}_s x) = \partial_x n$, $\mathrm{d}_s(n \mathrm{d}_s y) = \partial_y n$, $\mathrm{d}_s(n \mathrm{d}_s z) = \partial_z n$.

33. BORN, M. and E. WOLF, *Principles of optics*, 4th. ed., Oxford, Pergamon Press, 1970. Chapter III.
34. FELSEN, L. B. and N. MARCUVITZ, *Radiation and scattering of waves*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1973. Section 1.7.

Vraagstuk 31.4. De differentiaalvergelijking voor de baan van een elektrisch geladen deeltje in een gegeven, statisch, elektrisch veld is gegeven door (zie Vergelijking (6.5) met $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V$, waarin $V = V(\mathbf{r})$ de elektrostatische potentiaal van $\mathbf{E}$ voorstelt) $m_0 \mathrm{d}_t^2 \mathbf{r} = -q\, \mathbf{grad}\, V$, in de onderstelling dat $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \ll c_0^2$. Laat s de booglengte langs de baan van het deeltje aangeven, dan is $\mathrm{d}_t = (\mathrm{d}_t s)\mathrm{d}_s = v\mathrm{d}_s$. Bewijs, dat de differentiaalvergelijking is te herschrijven als $v\mathrm{d}_s(v\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = -(q/m_0)\, \mathbf{grad}\, V$. Nu is echter (zie Vraagstuk 6.1) $\frac{1}{2}m_0 v^2 = -q[V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0)]$ als $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ het punt is waar $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; hiermee wordt $v = |\mathbf{v}|$ een gegeven functie van de plaatscoördinaten. Verder is $\mathbf{grad}\, V = \mathbf{grad}[V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0)] = -\frac{1}{2}(m_0/q)\, \mathbf{grad}\, v^2$. Laat zien, dat na substitutie van dit resultaat de differentiaalvergelijking voor de baan van het geladen deeltje overgaat in $v\mathrm{d}_s(v\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{grad}\, v^2$. (Deze vergelijking is identiek met Vergelijking (31.49), indien v wordt vervangen door n of omgekeerd. Dit resultaat is de grondslag voor de theorie van de afbeelding met behulp van een elektronenmicroscoop.)

32. Uniforme, elektromagnetische stralen in een horizontaal gelaagd medium

In een horizontaal gelaagd medium veranderen ε en μ slechts in een vaste richting in de ruimte; deze richting noemen wij de verticale richting. De platte vlakken loodrecht op deze richting noemen wij horizontale platte vlakken. Van het te gebruiken rechts-cyclische, Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij de z-as verticaal; de x-as en de y-as zijn dan horizontaal. Voor een horizontaal gelaagd medium geldt

$$\mathbf{grad}\, n = (\partial_z n)\, \mathbf{i}_z = [\partial_z (\varepsilon_r \mu_r)^{\frac{1}{2}}]\, \mathbf{i}_z . \tag{32.1}$$

Substitutie van (32.1) in (31.48) geeft

$$\mathrm{d}_s(n \mathrm{d}_s \mathbf{r}) = (\partial_z n)\, \mathbf{i}_z \tag{32.2}$$

als differentiaalvergelijking voor de banen van uniforme, elektromagnetische stralen in een horizontaal gelaagd medium.

Een eerste resultaat uit (32.2) volgt door linker- en rechterlid van de vergelijking vectorieel met $\mathbf{i}_z$ te vermenigvuldigen. Daar

$$\mathbf{i}_z \times (\partial_z n)\, \mathbf{i}_z = \mathbf{0} \tag{32.3}$$

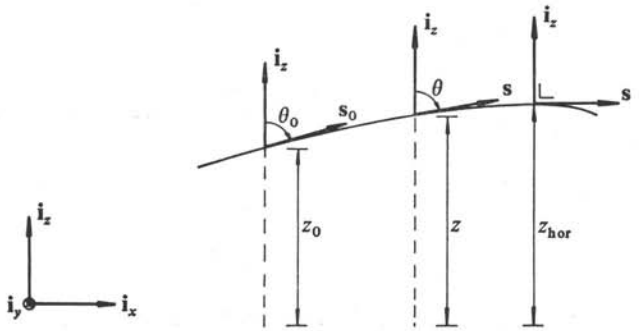


Fig. 75. De baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een horizontaal gelaagd medium.

en

$$\mathbf{i}_z \times \mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \mathrm{d}_s(\mathbf{i}_z \times n\mathbf{s}), \tag{32.4}$$

omdat $\mathbf{i}_z$ een constante vector is en $\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{s}$, volgt dan

$$\mathrm{d}_s(\mathbf{i}_z \times n\mathbf{s}) = \mathbf{0}. \tag{32.5}$$

Derhalve is

$$\mathbf{i}_z \times n\mathbf{s} = \text{constante vector langs de baan van een straal.} \tag{32.6}$$

Uit het constant zijn van de richting van het linkerlid van (32.6) volgt, dat de banen van uniforme, elektromagnetische stralen in een horizontaal gelaagd medium verlopen in het verticale vlak dat gaat door het beginpunt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}_x + y_0\mathbf{i}_y + z_0\mathbf{i}_z$ van de baan en zijn beginrichting $\mathbf{s}_0$. Laat nu θ de hoek zijn tussen $\mathbf{i}_z$ en $\mathbf{s}$ en θ_0 de hoek tussen $\mathbf{i}_z$ en $\mathbf{s}_0$ (Fig. 75), dan volgt uit het constant zijn van de grootte van het linkerlid van (32.6)

$$n(z)\sin(\theta) = C_0, \tag{32.7}$$

waarin

$$C_0 \stackrel{\text{def}}{=\!=} n(z_0)\sin(\theta_0) \tag{32.8}$$

de *baanconstante* van de baan voorstelt. Vergelijking (32.7) staat bekend als de *wet van* SNEL *(*SNELLIUS*) voor een horizontaal gelaagd medium.*

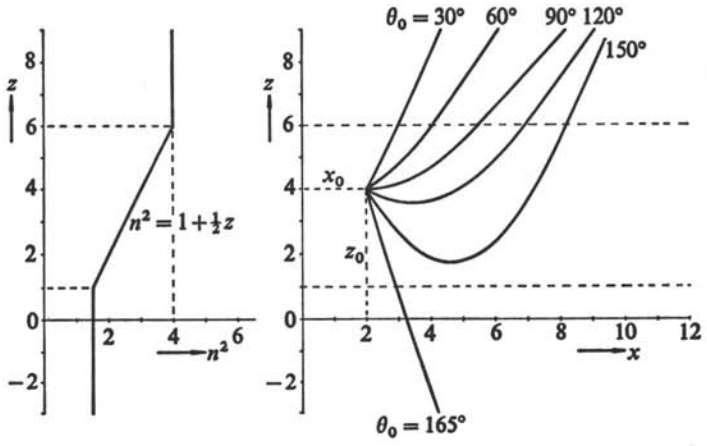
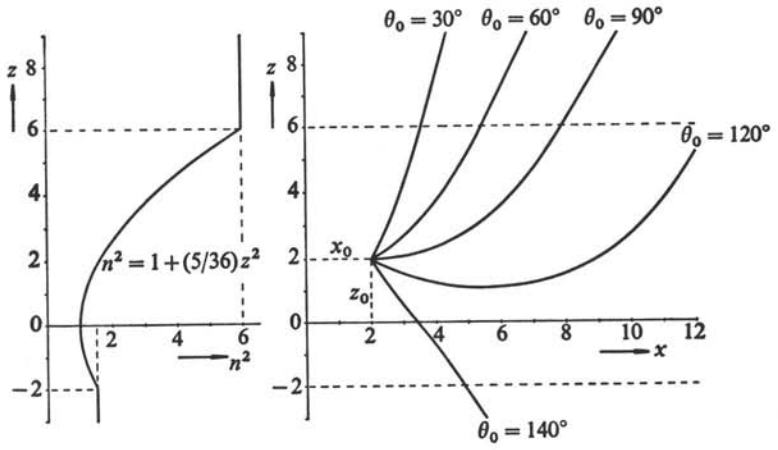
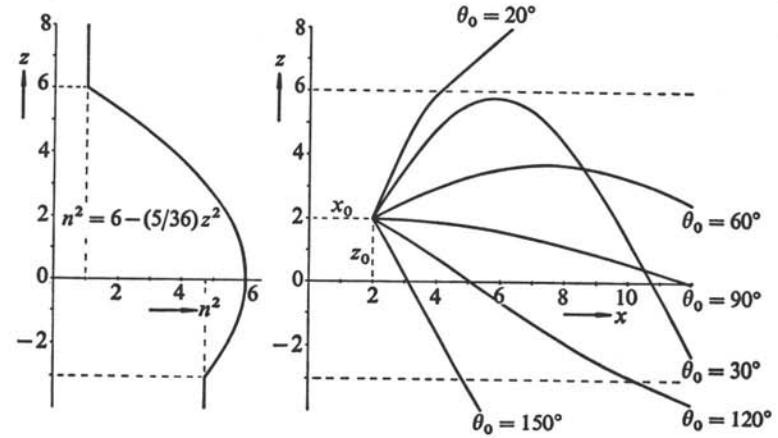


Fig. 76. Banen van uniforme, elektromagnetische stralen in een medium waarvan $n^2 = n^2(z)$ lineair overgaat van de ene constante waarde in de andere. In het overgangsgebied is $n^2 = q_0 + q_1 z$, waarin q_0 en q_1 constanten zijn.



(a)



(b)

Fig. 77. Banen van uniforme, elektromagnetische stralen in een medium waarvan $n^2 = n^2(z)$ parabolisch overgaat van de ene constante waarde in de andere. In het overgangsgebied is $n^2 = q_0 + q_2 z^2$, waarin q_0 en q_2 constanten zijn, met (a) $q_2 > 0$, (b) $q_2 < 0$.

Een tweede resultaat uit (32.2) volgt door linker- en rechterlid van de vergelijking scalair met $\mathbf{i}_z$ te vermenigvuldigen. Daar

$$\mathbf{i}_z \cdot (\partial_z n)\, \mathbf{i}_z = \partial_z n \tag{32.9}$$

en

$$\mathbf{i}_z \cdot \mathrm{d}_s(n \mathrm{d}_s \mathbf{r}) = \mathrm{d}_s(\mathbf{i}_z \cdot n\mathbf{s}) = \mathrm{d}_s[n \cos(\theta)], \tag{32.10}$$

omdat $\mathbf{i}_z$ een constante vector is, $\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{s}$ en $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{s} = \cos(\theta)$, volgt dan

$$\mathrm{d}_s[n \cos(\theta)] = \partial_z n\,. \tag{32.11}$$

Afhankelijk van de keuze van beginpunt en beginrichting kan de baan van een straal een punt hebben waar $\theta = \pi/2$; in zo'n punt heeft de baan een horizontale raaklijn. Laat $z = z_{\mathrm{hor}}$ de waarde van de verticale coördinaat zijn waar dit optreedt (Fig. 75), dan geeft substitutie van $\theta = \pi/2$ en $z = z_{\mathrm{hor}}$ in (32.7), met gebruikmaking van (32.8),

$$n(z_{\mathrm{hor}}) = n(z_0) \sin(\theta_0) = C_0\,. \tag{32.12}$$

Daar $0 \leq \sin(\theta_0) \leq 1$, moet voor de geldigheid van (32.12) voldaan worden aan de voorwaarde $n(z_{\mathrm{hor}}) \leq n(z_0)$. Dit houdt in, dat in het beginpunt de baan moet starten in de richting van afnemende n. Na passeren van het punt met horizontale raaklijn buigt de baan af in de richting van toenemende n. Volgens (32.7) zou θ wel de waarde $\pi/2$ en z de waarde z_{hor} kunnen behouden, maar op grond van (32.11) kan dit laatste alleen maar als $z = z_{\mathrm{hor}}$ samenvalt met een verticaal niveau waar $\partial_z n = 0$. Een dergelijk verticaal niveau kan echter alleen asymptotisch worden bereikt, óf de baan moet in horizontale richting op dit niveau beginnen.

In Fig. 76 zijn een aantal banen getekend van uniforme, elektromagnetische stralen in een medium waarvan $n^2 = n^2(z)$ lineair overgaat van de ene constante waarde in de andere (zie ook Vraagstuk 32.3). Fig. 77 geeft een aantal banen weer van uniforme, elektromagnetische stralen in een medium waarvan $n^2 = n^2(z)$ parabolisch overgaat van de ene constante waarde in de andere (zie ook Vraagstuk 32.4).

De theorie van de elektromagnetische stralen in een horizontaal gelaagd medium vindt onder andere toepassing bij beschouwingen omtrent de propagatie van radiogolven in de atmosfeer over zodanig kleine afstanden dat de kromming van de atmosfeer te verwaarlozen is.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 32.1. Leid uit de vergelijkingen $\mathrm{d}_s[n\sin(\theta)]=0$ (zie Vergelijking (32.5)) en $\mathrm{d}_s[n\cos(\theta)]=\partial_z n$ (zie Vergelijking (32.11)) af, dat voor de baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een horizontaal gelaagd medium geldt: (a) $\mathrm{d}_s n=\cos(\theta)\partial_z n$ en (b) $\mathrm{d}_s\theta=C_0\partial_z(n^{-1})$, waarin C_0 de door Vergelijking (32.8) gedefinieerde baanconstante voorstelt.

Vraagstuk 32.2. Laat $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ de parametervoorstelling zijn van de baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een horizontaal gelaagd medium. Kies van het gebruikte Cartesiaanse coördinatenstelsel de z-as zodanig, dat $n=n(z)$ en de x-as zodanig, dat de baan in het x,z-vlak verloopt (dus $\mathbf{s}_0=\sin(\theta_0)\mathbf{i}_x+\cos(\theta_0)\mathbf{i}_z$). De vergelijking voor de baan van de straal kan dan ook in de vorm $z=z(x)$ worden geschreven. Leid uit Vergelijking (32.2) een differentiaalvergelijking voor de baan van de straal af, waarin x als onafhankelijk veranderlijke en z als afhankelijk veranderlijke voorkomt. (Aanwijzing: maak gebruik van de eigenschap $n\mathrm{d}_s z=n(\mathrm{d}_s x)\mathrm{d}_x z=C_0\,\mathrm{d}_x z$, waarin C_0 de door Vergelijking (32.8) gedefinieerde baanconstante voorstelt.)
Antwoord: $C_0^2\mathrm{d}_x^2 z=\frac{1}{2}\partial_z(n^2)$.

Vraagstuk 32.3. De in Vraagstuk 32.2 verkregen differentiaalvergelijking wordt gebruikt om de baan van een uniforme, elektromagnetische straal te bepalen in een horizontaal gelaagd medium waarvoor $n^2=q_0+q_1 z$; hierin zijn q_0 en q_1 constanten. (a) Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan z als functie van x in dit geval moet voldoen. (b) Bepaal de vergelijking van de baan van de straal die door het punt $x=x_0$, $z=z_0$ gaat en in dit punt een hoek θ_0 met $\mathbf{i}_z$ maakt. (c) Bepaal het punt $x=x_{\mathrm{hor}}$, $z=z_{\mathrm{hor}}$, waar de baan van de straal een horizontale raaklijn heeft. (d) Onder welke voorwaarde(n) is $x_{\mathrm{hor}}>x_0$, in de onderstelling, dat $0\leq\theta_0\leq\pi$? (e) Als aan de onder (d) gestelde voorwaarde(n) is voldaan, in welk geval is dan $z_{\mathrm{hor}}>z_0$, respectievelijk $z_{\mathrm{hor}}<z_0$?
Antwoord: (a) $C_0^2\mathrm{d}_x^2 z=\frac{1}{2}q_1$; (b) $z-z_0=A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2$, waarin $A_1=\cot(\theta_0)$ en $A_2=q_1/4C_0^2$, met $C_0=n(z_0)\sin(\theta_0)=(q_0+q_1 z_0)^{\frac{1}{2}}\sin(\theta_0)$; (c) $x_{\mathrm{hor}}-x_0=-A_1/2A_2$, $z_{\mathrm{hor}}-z_0=-A_1^2/4A_2$; (d) $x_{\mathrm{hor}}-x_0>0$ als $q_1^{-1}\cos(\theta_0)<0$; (e) $z_{\mathrm{hor}}-z_0>0$ als $q_1<0$ en $z_{\mathrm{hor}}-z_0<0$ als $q_1>0$.

Vraagstuk 32.4. De in Vraagstuk 32.2 verkregen differentiaalvergelijking wordt gebruikt om de baan van een uniforme, elektromagnetische straal te bepalen in een horizontaal gelaagd medium waarvoor $n^2=q_0+q_2 z^2$; hierin zijn q_0 en q_2 constanten. (a) Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan z als functie van x in dit geval moet voldoen. (b) Onderstel, dat $q_2>0$ en bepaal de vergelijking van de baan van de straal die door het punt $x=x_0$, $z=z_0$ gaat en in dit punt een hoek θ_0 met $\mathbf{i}_z$ maakt. (c) Onderstel, dat $q_2<0$ en bepaal de vergelijking van de baan van de straal die door het punt $x=x_0$, $z=z_0$ gaat en in dit punt een hoek θ_0 met $\mathbf{i}_z$ maakt. (d) Laat $x=x_{\mathrm{hor}}$, $z=z_{\mathrm{hor}}$ het punt zijn waar de onder (b) beschouwde baan een horizontaal punt heeft; bepaal een vergelijking waaruit x_{hor} volgt. (e) Wat is de maximale waarde z_{max} van z die de onder (c) beschouwde baan bereikt?
Antwoord: (a) $C_0^2\mathrm{d}_x^2 z=q_2 z$; (b) $z=A_1\cosh[q_2^{\frac{1}{2}}(x-x_0)/C_0]+B_1\sinh[q_2^{\frac{1}{2}}(x-x_0)/C_0]$, waarin $A_1=z_0$ en $B_1=q_2^{-\frac{1}{2}}C_0\cot(\theta_0)$, met $C_0=n(z_0)\sin(\theta_0)=(q_0+q_2 z_0^2)^{\frac{1}{2}}\sin(\theta_0)$;
(c) $z=A_2\cos[(-q_2)^{\frac{1}{2}}(x-x_0)/C_0]+B_2\sin[(-q_2)^{\frac{1}{2}}(x-x_0)/C_0]$, waarin $A_2=z_0$ en $B_2=(-q_2)^{-\frac{1}{2}}C_0\cot(\theta_0)$, met $C_0=n(z_0)\sin(\theta_0)=(q_0+q_2 z_0^2)^{\frac{1}{2}}\sin(\theta_0)$;
(d) $\tanh[q_2^{\frac{1}{2}}(x_{\mathrm{hor}}-x)/C_0]=-B_1/A_1$; (e) $z_{\mathrm{max}}=(A_2^2+B_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

33. Uniforme, elektromagnetische stralen in een sferisch gelaagd medium

In een sferisch gelaagd medium zijn ε en μ slechts afhankelijk van de afstand van een punt in de ruimte tot een vast centrum. Van het te gebruiken rechts-cyclische, Cartesiaanse coördinatenstelsel kiezen wij de oorsprong in het centrum van sferische symmetrie. De afstand van een punt in de ruimte tot dit centrum duiden wij aan met $r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Voor een sferisch gelaagd medium geldt

$$\mathbf{grad}\, n = (\partial_r n)\, \mathbf{i}_r = [\partial_r(\varepsilon_r \mu_r)^{\frac{1}{2}}]\, \mathbf{i}_r, \tag{33.1}$$

waarin $\mathbf{i}_r$ de eenheidsvector in radiale richting aangeeft ($\mathbf{i}_r = \mathbf{r}/r$). Substitutie van (33.1) in (31.48) geeft

$$\mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = (\partial_r n)\, \mathbf{i}_r \tag{33.2}$$

als differentiaalvergelijking voor de banen van elektromagnetische stralen in een sferisch gelaagd medium.

Een eerste resultaat uit (33.2) volgt door linker- en rechterlid van de vergelijking vectorieel met $\mathbf{r}$ te vermenigvuldigen. Daar

$$\mathbf{r} \times (\partial_r n)\, \mathbf{i}_r = \mathbf{0} \tag{33.3}$$

en

$$\mathbf{r} \times \mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \mathrm{d}_s(\mathbf{r} \times n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) - \mathrm{d}_s\mathbf{r} \times (n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) = \mathrm{d}_s(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}), \tag{33.4}$$

omdat $\mathrm{d}_s\mathbf{r} \times \mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{0}$ en $\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{s}$, volgt dan

$$\mathrm{d}_s(\mathbf{r} \times n\mathbf{s}) = \mathbf{0}. \tag{33.5}$$

Derhalve is

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{s} = \text{constante vector langs de baan van een straal.} \tag{33.6}$$

Uit het constant zijn van de richting van het linkerlid van (33.6) volgt, dat de banen van uniforme, elektromagnetische stralen in een sferisch gelaagd medium verlopen in het vlak dat gaat door het centrum $\mathcal{O}$, het beginpunt $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i}_x + y_0\mathbf{i}_y + z_0\mathbf{i}_z$ van de baan en zijn beginrichting $\mathbf{s}_0$.

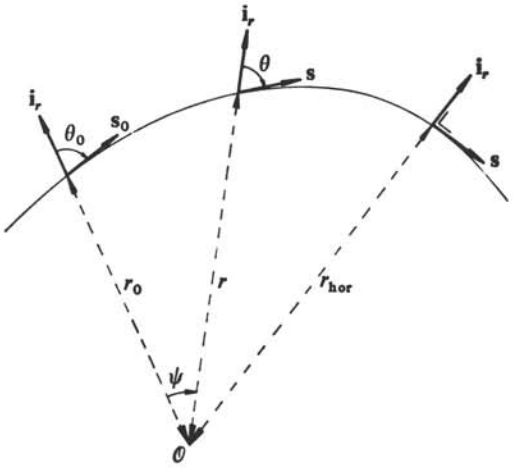


Fig. 78. De baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een sferisch gelaagd medium met centrum $\mathcal{O}$.

Laat nu θ de hoek zijn tussen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ en θ_0 de hoek tussen $\mathbf{r}_0$ en $\mathbf{s}_0$ (Fig. 78), dan volgt uit het constant zijn van de grootte van het linkerlid van (33.6)

$$rn(r)\sin(\theta) = C_0\,, \tag{33.7}$$

waarin

$$C_0 \stackrel{\text{def}}{=\!=} r_0 n(r_0)\sin(\theta_0) \tag{33.8}$$

de *baanconstante* van de baan voorstelt. Vergelijking (33.7) staat bekend als de *wet van* SNEL *(*SNELLIUS*) voor een sferisch gelaagd medium*; de wet staat ook wel bekend als de *wet van* BOUGUER.

Een tweede resultaat uit (33.2) volgt door linker- en rechterlid scalair met $\mathbf{r}$ te vermenigvuldigen. Daar

$$\mathbf{r}\cdot(\partial_r n)\,\mathbf{i}_r = r\partial_r n = \partial_r(rn) - n \tag{33.9}$$

en

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}_s(n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) &= \mathrm{d}_s(\mathbf{r}\cdot n\mathrm{d}_s\mathbf{r}) - \mathrm{d}_s\mathbf{r}\cdot n\mathrm{d}_s\mathbf{r}\\ &= \mathrm{d}_s(\mathbf{r}\cdot n\mathbf{s}) - n\\ &= \mathrm{d}_s[rn\cos(\theta)] - n\,,\end{aligned} \tag{33.10}$$

omdat $\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{s}$, $\mathrm{d}_s\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = 1$ en $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = r\cos(\theta)$, volgt dan

$$\mathrm{d}_s[rn\cos(\theta)] = \partial_r(rn)\,. \tag{33.11}$$

Afhankelijk van de keuze van beginpunt en beginrichting kan de baan van een straal een punt hebben waar $\theta = \pi/2$; wij zeggen wederom, dat de baan in zo'n punt een horizontale raaklijn heeft. Laat $r = r_{\text{hor}}$ de afstand zijn van het centrum tot het punt waar dit optreedt (Fig. 78), dan geeft substitutie van $\theta = \pi/2$ en $r = r_{\text{hor}}$ in (33.7), met gebruikmaking van (33.8),

$$r_{\text{hor}}\, n(r_{\text{hor}}) = r_0\, n(r_0) \sin(\theta_0) = C_0 . \tag{33.12}$$

Daar $0 \leq \sin(\theta_0) \leq 1$, moet voor de geldigheid van (33.12) voldaan worden aan de voorwaarde $r_{\text{hor}} n(r_{\text{hor}}) \leq r_0 n(r_0)$. Dit houdt in, dat in het beginpunt de baan moet starten in de richting van afnemende rn. Na passeren van het punt met horizontale raaklijn buigt de baan af in de richting van toenemende rn. Volgens (33.7) zou θ wel de waarde $\pi/2$ en r de waarde r_{hor} kunnen behouden, maar op grond van (33.11) kan dit laatste alleen maar als $r = r_{\text{hor}}$ samenvalt met een oppervlak waar $\partial_r(rn) = 0$. Een dergelijk oppervlak kan echter alleen asymptotisch worden bereikt, óf de baan moet in horizontale richting op dit niveau beginnen.

De theorie van de elektromagnetische stralen in een sferisch gelaagd medium vindt onder andere toepassing bij beschouwingen omtrent de propagatie van radiogolven in de atmosfeer over zodanige afstanden dat de kromming van de atmosfeer constant ondersteld kan worden.

VRAAGSTUKKEN

Vraagstuk 33.1. Leid uit de vergelijkingen $\mathrm{d}_s[rn \sin(\theta)] = 0$ (zie Vergelijking (33.5)) en $\mathrm{d}_s[rn \cos(\theta)] = \partial_r(rn)$ (zie Vergelijking (33.11)) af, dat voor de baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een sferisch gelaagd medium geldt: (a) $\mathrm{d}_s(rn) = \cos(\theta)\partial_r(rn)$ en (b) $\mathrm{d}_s\theta = C_0 \partial_r(rn)^{-1}$, waarin C_0 de door Vergelijking (33.8) gedefinieerde baanconstante voorstelt.

Vraagstuk 33.2. Bewijs, dat Vergelijking (33.11) kan worden herschreven als $rn\,\mathrm{d}_s(rn\mathrm{d}_s r) = \frac{1}{2}\partial_r[(rn)^2]$. (Aanwijzing: maak gebruik van de eigenschap $\mathbf{r}\cdot n\mathrm{d}_s\mathbf{r} = \frac{1}{2}n\mathrm{d}_s(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = \frac{1}{2}n\mathrm{d}_s(r^2) = rn\mathrm{d}_s r$.)

Vraagstuk 33.3. Laat $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ de parametervoorstelling zijn van de baan van een uniforme, elektromagnetische straal in een sferisch gelaagd medium. Laat ψ de middelpuntshoek zijn tussen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{r}_0$ (Fig. 78), dan kan de vergelijking voor de baan van de straal ook in de vorm $r = r(\psi)$ worden geschreven. Leid uit Vergelijking (33.7) en het resultaat van Vraagstuk 33.2 een differentiaalvergelijking voor de baan van de straal af, waarin ψ als onafhankelijk veranderlijke en r als afhankelijk veranderlijke voorkomt. (Aanwijzing: maak gebruik van de eigenschap $rn\mathrm{d}_s r = rn\cos(\theta) = rn\sin(\theta)\cot(\theta) = (C_0/r)\mathrm{d}_\psi r$, waarin C_0 de door Vergelijking (33.8) gedefinieerde baanconstante voorstelt.)
Antwoord: $(C_0/r)\mathrm{d}_\psi[(C_0/r)\mathrm{d}_\psi r] = \frac{1}{2}\partial_r[(rn)^2]$.

Aanhangsel A : Vectoralgebra

In dit aanhangsel geven wij een overzicht van de voornaamste formules uit de vectoralgebra. De vectoren zijn gedefinieerd in de driedimensionale ruimte. Hun kentallen zijn reële of complexe getallen en worden vastgelegd ten opzichte van een vaste orthonormale basis $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$. In de aangegeven volgorde vormen $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$ en $\mathbf{i}_z$ een rechts-cyclisch stelsel.

Laten $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}_x + a_y\mathbf{i}_y + a_z\mathbf{i}_z$ en $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i}_x + b_y\mathbf{i}_y + b_z\mathbf{i}_z$ twee willekeurige vectoren zijn en λ en μ twee willekeurige reële of complexe getallen, dan is de *lineaire combinatie* $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ de vector die is gedefinieerd als

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\lambda a_x + \mu b_x)\,\mathbf{i}_x + (\lambda a_y + \mu b_y)\,\mathbf{i}_y + (\lambda a_z + \mu b_z)\,\mathbf{i}_z\,, \tag{A.1}$$

het *scalaire* of *inwendige product* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ de scalair gedefinieerd als

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=\!=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{A.2}$$

en het *vectoriële* of *uitwendige product* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ de vector gedefinieerd als

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{A.3}$$

Het scalaire product heeft de eigenschap

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{A.4}$$

en het vectoriële product de eigenschap

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{A.5}$$

Laten nu $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ drie willekeurige vectoren zijn, dan is hun *scalaire tripelproduct* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ gegeven door

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{A.6}$$

Het scalaire tripelproduct heeft de eigenschap

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$
$$= -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}). \tag{A.7}$$

Het *vectoriële tripelproduct* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ kan worden herleid tot

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}; \tag{A.8}$$

evenzo is

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}. \tag{A.9}$$

Aanhangsel B : Vectoranalyse

In dit aanhangsel geven wij een overzicht van de voornaamste formules uit de vectoranalyse.

(a) *Differentiëren en integreren naar een parameter*

Laat $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ een differentieerbare vectorfunctie van de parameter t zijn, dan is

$$\mathrm{d}_t \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\mathrm{d}_t v_x)\,\mathbf{i}_x + (\mathrm{d}_t v_y)\,\mathbf{i}_y + (\mathrm{d}_t v_z)\,\mathbf{i}_z . \tag{B.1}$$

Laat $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ een integreerbare vectorfunctie van de parameter t zijn, dan is

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{\text{def}}{=\!=} \Big(\int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathbf{i}_x + \Big(\int_{t_1}^{t_2} v_y(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathbf{i}_y + \Big(\int_{t_1}^{t_2} v_z(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathbf{i}_z . \tag{B.2}$$

Laat $\varphi = \varphi(t)$ een differentieerbare scalarfunctie van de parameter t zijn en laten $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ differentieerbare vectorfuncties van de parameter t zijn, dan gelden voor het differentiëren naar t de volgende regels:

$$\mathrm{d}_t(\varphi \mathbf{v}) = (\mathrm{d}_t \varphi)\,\mathbf{v} + \varphi(\mathrm{d}_t \mathbf{v}), \tag{B.3}$$

$$\mathrm{d}_t(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = (\mathrm{d}_t \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot(\mathrm{d}_t \mathbf{w}), \tag{B.4}$$

$$\mathrm{d}_t(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathrm{d}_t \mathbf{v})\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times(\mathrm{d}_t \mathbf{w}). \tag{B.5}$$

(b) *Differentiëren naar de plaatscoördinaten*

Om de plaats in de ruimte vast te leggen, gebruiken wij de Cartesiaanse coördinaten x, y, z die bij de orthonormale basis $\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ behoren. De plaatsvector wordt aangeduid met

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z . \tag{B.6}$$

Laat $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ een differentieerbare scalarfunctie van de plaatscoördinaten zijn, dan is de *gradiënt van* φ de vectorfunctie die is gedefinieerd als

$$\mathbf{grad}\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\partial_x\varphi)\,\mathbf{i}_x + (\partial_y\varphi)\,\mathbf{i}_y + (\partial_z\varphi)\,\mathbf{i}_z\,. \tag{B.7}$$

Laat $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ een differentieerbare vectorfunctie van de plaatscoördinaten zijn, dan is de *divergentie van* $\mathbf{v}$ de scalarfunctie die is gedefinieerd als

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \tag{B.8}$$

en de *rotatie van* $\mathbf{v}$ de vectorfunctie die is gedefinieerd als

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \tag{B.9}$$

Met behulp van de *nabla-operator (operator van* HAMILTON*)*, die is gedefinieerd als

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbf{i}_x\partial_x + \mathbf{i}_y\partial_y + \mathbf{i}_z\partial_z\,, \tag{B.10}$$

kan men schrijven

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi\,, \tag{B.11}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}\,, \tag{B.12}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v}\,. \tag{B.13}$$

In de hierna volgende regels voor het differentiëren naar de plaatscoördinaten zijn $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ en $\psi = \psi(\mathbf{r})$ differentieerbare scalarfuncties en $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r})$ differentieerbare vectorfuncties. Er geldt

$$\mathbf{grad}(\varphi+\psi) = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{grad}\,\psi\,, \tag{B.14}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathrm{div}\,\mathbf{v} + \mathrm{div}\,\mathbf{w}\,, \tag{B.15}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{rot}\,\mathbf{w}\,, \tag{B.16}$$

$$\mathbf{grad}(\varphi\psi) = \psi\,\mathbf{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathbf{grad}\,\psi\,, \tag{B.17}$$

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\varphi + \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,, \tag{B.18}$$

$$\mathbf{rot}(\varphi\mathbf{v}) = (\mathbf{grad}\,\varphi)\times\mathbf{v} + \varphi\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,, \tag{B.19}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{w}\,, \tag{B.20}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} - \mathbf{w}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{w} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}\,, \tag{B.21}$$

$$\mathbf{grad}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{w}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{w} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{w}\,. \tag{B.22}$$

Laat $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ een tweemaal differentieerbare scalarfunctie zijn, dan is

$$\text{div } \mathbf{grad}\, \varphi = \nabla^2 \varphi, \tag{B.23}$$

waarin

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{B.24}$$

de *operator van* LAPLACE is, en

$$\mathbf{rot\ grad}\, \varphi = \mathbf{0}. \tag{B.25}$$

Laat $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ een tweemaal differentieerbare vectorfunctie zijn, dan is

$$\text{div } \mathbf{rot}\, \mathbf{v} = 0, \tag{B.26}$$

$$\mathbf{rot\ rot}\, \mathbf{v} = \mathbf{grad}\ \text{div}\ \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}. \tag{B.27}$$

In de hierna volgende voorbeelden is $\mathbf{r}$ gegeven door (B.6), is

$$r = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 \tag{B.28}$$

en is $\mathbf{a}$ een constante vector. Er geldt

$$\mathbf{grad}\, r = \mathbf{r}/r, \tag{B.29}$$

$$\mathbf{grad}\, r^n = n r^{n-2} \mathbf{r}, \tag{B.30}$$

$$\mathbf{grad}\, f(r) = (\mathrm{d}_r f)\, \mathbf{r}/r, \tag{B.31}$$

$$\text{div } \mathbf{r} = 3, \tag{B.32}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{r} = \mathbf{0}, \tag{B.33}$$

$$\nabla^2 r^n = n(n+1)\, r^{n-2}, \tag{B.34}$$

$$\mathbf{grad}\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \tag{B.35}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{r} = \mathbf{a}, \tag{B.36}$$

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}. \tag{B.37}$$

(c) *Integraalstellingen*

Laat $\mathscr{S}$ een voldoende glad, begrensd, gesloten oppervlak zijn en $\mathscr{V}$ het begrensde gebied binnen $\mathscr{S}$. De eenheidsvector langs de naar buiten (dat is van $\mathscr{V}$ af) gerichte normaal op $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathbf{n}$. In $\mathscr{V}$ en op $\mathscr{S}$ zijn een continu differentieerbare scalarfunctie $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ en een continu differentieerbare vectorfunctie $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ gedefinieerd. Dan is

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\varphi\, \mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{grad}\ \varphi\ \mathrm{d}V, \tag{B.38}$$

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V, \tag{B.39}$$

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}A = \iiint_{\mathscr{V}} \mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V. \tag{B.40}$$

Vergelijking (B.39) staat bekend als de *stelling van* GAUSS; (B.38) en (B.40) zijn modificaties hiervan.

Laat vervolgens $\mathscr{C}$ een voldoend gladde, begrensde, enkelvoudig gesloten kromme zijn en $\mathscr{S}$ een voldoend glad, begrensd, tweezijdig oppervlak dat $\mathscr{C}$ tot randkromme heeft. Wij kiezen een richting waarin $\mathscr{C}$ wordt doorlopen en noemen de eenheidsvector langs de raaklijn aan $\mathscr{C}$ in deze richting $\boldsymbol{\tau}$; de rechts-cyclisch aan $\boldsymbol{\tau}$ toegevoegde eenheidsvector langs de normaal op $\mathscr{S}$ noemen wij $\mathbf{n}$. In een enkelvoudig samenhangend gebied $\mathscr{V}$, waarin $\mathscr{C}$ en $\mathscr{S}$ zijn gelegen, zijn een continu differentieerbare scalarfunctie $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ en een continu differentieerbare vectorfunctie $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ gedefinieerd. Dan is

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\varphi\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} (\mathbf{n}\times\nabla)\,\varphi\,\mathrm{d}A = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\times\mathbf{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}A, \tag{B.41}$$

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} (\mathbf{n}\times\nabla)\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}A = \iint_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}A, \tag{B.42}$$

$$\oint_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\tau}\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}s = \iint_{\mathscr{S}} (\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{v}\,\mathrm{d}A. \tag{B.43}$$

Vergelijking (B.42) staat bekend als de *stelling van* STOKES; (B.41) en (B.43) zijn modificaties hiervan.

Laat tenslotte $\mathscr{L}$ een voldoend gladde, begrensde kromme zijn, die van het beginpunt $\mathscr{P}$ naar het eindpunt $\mathscr{Q}$ wordt doorlopen. De eenheidsvector langs de raaklijn aan $\mathscr{L}$ in de richting waarin $\mathscr{L}$ wordt doorlopen, noemen wij $\boldsymbol{\tau}$. In een gebied $\mathscr{V}$, waarin $\mathscr{L}$ is gelegen, is een continu differentieerbare scalarfunctie $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ gedefinieerd. Dan is

$$\int_{\mathscr{P}}^{\mathscr{Q}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{grad}\,\varphi\,\mathrm{d}s = \varphi(\mathbf{r}_{\mathscr{Q}}) - \varphi(\mathbf{r}_{\mathscr{P}}). \tag{B.44}$$

Bij vaste $\mathscr{P}$ en $\mathscr{Q}$ is het resultaat onafhankelijk van de gevolgde integratieweg, hetgeen met behulp van (B.42) en (B.25) te bewijzen is.

Aanhangsel C : Rekenschema voor de bepaling van de vierkantswortel uit een complex getal

In dit aanhangsel wordt een rekenschema opgesteld om de twee (complexe) waarden te bepalen van de vierkantswortel uit een complex getal. Laat $p+jq$ het gegeven complexe getal zijn en noem de gevraagde vierkantswortel $\alpha+j\beta$; hierin zijn p,q, α en β reëel. Het vraagstuk is dan zodanige waarden van α en β te bepalen, dat

$$(\alpha+j\beta)^2 = p+jq\,. \tag{C.1}$$

Door uitwerken van het linkerlid en gelijkstellen van de reële, respectievelijk de imaginaire delen ter weerszijden van het gelijkteken verkrijgt men

$$\alpha^2-\beta^2 = p \tag{C.2}$$

en

$$2\alpha\beta = q\,. \tag{C.3}$$

Uit (C.2) volgt

$$(\alpha^2-\beta^2)^2 = p^2 \tag{C.4}$$

en uit (C.3) en (C.4)

$$(\alpha^2+\beta^2)^2 = p^2+q^2, \tag{C.5}$$

zodat

$$\alpha^2+\beta^2 = (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{C.6}$$

Hierbij wordt afgesproken, dat (reëel en niet-negatief getal)$^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Uit (C.2) en (C.6) wordt verkregen

$$2\alpha^2 = (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + p \tag{C.7}$$

en

$$2\beta^2 = (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} - p, \tag{C.8}$$

zodat

$$\alpha = \pm [\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}p]^{\frac{1}{2}} \tag{C.9}$$

en

$$\beta = \pm [\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}p]^{\frac{1}{2}}. \tag{C.10}$$

Van de vier mogelijke combinaties van α en β die uit (C.9) en (C.10) volgen, zijn er slechts twee toelaatbaar. Om deze twee te vinden, gebruiken wij wederom (C.3) en merken op dat

$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(q), \tag{C.11}$$

waarin

$$\operatorname{sgn}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{ll} -1 & \text{voor } u < 0. \\ 0 & \text{voor } u = 0, \\ 1 & \text{voor } u > 0. \end{array} \tag{C.12}$$

Door toepassing van (C.11) worden twee van de vier combinaties uitgesloten. Voor de resterende twee combinaties geldt, dat zij tegengesteld gelijk aan elkaar zijn.

Register

Aantal deeltjes
  in gebied, 7-9
  wet van behoud van, 9-10
Aardingsweerstand
  van half-bolvormige elektrode, 120
Actief medium, 155, 241
  constitutieve coëfficiënten voor, 156, 157
Analytische voortzetting, 243, 249
Anisotroop materiaal, 70
Anti-reflectiedeklaag
  reflectantie van, 232–233, 237, 238
  transmittantie van, 232–233, 234
Atomaire structuur van de materie, 1

Baanmagnetisch moment
  van deeltje in gesloten baan, 31–32
  van stelsel deeltjes, 30–33
Baan van uniforme elektromagnetische straal
  algemene theorie van, 320–322
  baanconstante van, 326, 329, 331, 332
  beginpunt van, 322, 326, 330
  beginrichting van, 322, 326, 330
  differentiaalvergelijking voor, 322, 323, 325, 329, 330, 332
  horizontale raaklijn aan, 328, 332
  in homogeen gebied, 322
  in horizontaal gelaagd medium, 325–329
  in sferisch gelaagd medium, 330–332
  wet van Bouguer voor, 331
  wet van Snel (Snellius) voor, 326, 331
Basisvectoren
  van direct rooster, 141
  van reciprook rooster, 141–142
Beeldfunctie. *Zie* Eikonaal

Behoud, wet van
  van aantal deeltjes, 9–10
  van elektrische lading, 12
  van energie, 87, 89, 93
Beweeglijkheid van deeltjes, 107
Beweging van geladen deeltje
  in elektromagnetisch veld, 43–49
    energievergelijking voor, 45
  in statisch elektrisch veld, 45–46
  in statisch magnetisch veld, 46–48
Bode, betrekkingen van, 164
Botsingsfrequentie voor impulsoverdracht, 195
Bouguer, wet van, 331
Brekingsindex. *Zie* Complexe brekingsindex
Brewster, hoek van
  voor E-polarisatie, 306, 314
  voor H-polarisatie, 309, 314–315
Brongebied, 85

Cartesiaanse coördinaten, 1, 335
  eenheidsvectoren langs de assen van, 1
  plaatsvector in, 2, 258, 335
Causaliteitsbeginsel, 159–160
Causaliteitsbetrekkingen, 158–168
  algemene theorie van, 160–164
  voor complexe permeabiliteit, 165–166
  voor complexe permittiviteit, 165
  voor complexe soortelijke geleiding, 164–165
Circulair gepolariseerde veldgrootheid, 127
Cirkelfrequentie, 122
Cirkelfrequenties
  rij van onderling onmeetbare, 136

Cohaerentie, 273
Complexe brekingsindex
van eendimensionale golven, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 192, 194, 196, 197, 199, 200, 201, 203–204. *Zie ook* Propagatie van eendimensionale golven
van uniforme elektromagnetische straal, 320
vectoriële, 263. *Zie ook* Propagatie van driedimensionale vlakke golven
Complexe rekenwijze, 122–130, 132, 135, 137
Complexe voorstelling
van afgeleide naar de plaatscoördinaten, 124, 130
van afgeleide naar de tijd, 123–124, 130
van scalaire veldgrootheid, 123–124
van vectoriële veldgrootheid, 124–128
van veldgrootheid, 122
Concentratie
bij diffusie van geïnjecteerde deeltjes, 20, 24
van deeltjes, 7
van deeltjes van een bepaalde soort, 11
Conductantiematrix, 116–117, 119
Constitutieve coëfficiënten
differentiële, 71
van actief medium, 156, 157
van dissipatief medium, 156, 157
van passief medium, 156, 157
van verliesvrij medium, 156, 157
Constitutieve vergelijking
van diffusieproces, 16
voor warmtegeleiding, 96
Constitutieve vergelijkingen, elektromagnetische, 67–75
in frequentiedomein, 152, 158–159
in tijddomein, 67–70, 159
Continuïteitsvergelijking
voor deeltjesstroom, 10
voor elektrische stroom, 12
in frequentiedomein, 151
Continuümshypothese, 7, 10, 30, 33, 38, 84, 94, 95
Contrast, elektromagnetisch
van Fabry-Perot etalon, 236
van radome, 236
Convectiesnelheid
van deeltjes, 8–10
Convectiestroomdichtheid, 12
in frequentiedomein, 151
in materieel medium, 63
Convolutie van veldgrootheden
in de ruimte, 144–145, 147
in de tijd, 132–133, 135–136, 137–138
Coulomb, wet van, 59
Cyclotronfrequentie
van deeltje, 47
van elektron, 49

Deeltje
elektrische lading van, 6
impulsmoment van, 6
kinetische energie van, 44–45
plaats van, 6
rustenergie van, 44
rustmassa van, 6
snelheid van, 6
spinmagnetisch moment van, 6, 32
Deeltjes
levensduur van, 15, 18, 22
Deeltjesstroom
bij diffusie van geïnjecteerde deeltjes, 21, 25
continuïteitsvergelijking voor, 10
Deeltjesstroomdichtheid, 10
Differentiële constitutieve coëfficiënten, 71
Diffusie, 16–27
van geïnjecteerde deeltjes, 18–21, 21–25, 26–27
van ladingdragers in halfgeleiders, 25, 26
Diffusiecoëfficiënt, 16, 17
Diffusielengte, 20, 24
Diffusieproces, 16, 96
constitutieve vergelijking van, 16
Diffusiesnelheid, 16
Diffusiestroom, 17, 72
gecompenseerd door driftstroom, 120
Diffusiestroomdichtheid, 17
Diffusievergelijking, 16, 17
Dispersie, 186
Dissipatie, 89

Dissipatief medium, 155
constitutieve coëfficiënten voor, 156, 157
Divergentie van vectorfunctie, 336
Driedimensionale vlakke golf
fasevector van, 261
niet-uniforme, 262
polarisatietoestand van, 263, 264
uniforme, 262, 266–267
vectoriële fasesnelheid van, 266
vectoriële golfadmittantie van, 266
vectoriële golfimpedantie van, 267
vectoriële golflengte van, 266
vermogensstroomdichtheid in, 267
voortplantingsrichting van, 266
vectoriële complexe brekingsindex van, 263
vectoriële fasesnelheid van, 262
vectoriële golfadmittantie van, 262
vectoriële golfimpedantie van, 262
vectoriële golflengte van, 262
vermogensstroomdichtheid in, 263
verzwakkingsvector van, 261
vlakken van gelijke amplitude van, 262
vlakken van gelijke fase van, 262
voortplantingsvector van, 261
Driedimensionale vlakke golven, 258–315
algemene theorie van, 258–264
interferentie van twee, 273–283
met lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte, 264–265
met lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte, 265–266
propagatie in uniforme sectie, 267–272
reflectie en transmissie door scheidingsvlak van twee media, 297–315
reflectie tegen elektrisch ondoordringbaar voorwerp, 289–296
transversale en z-componenten van, 284–288
betrekkingen tussen, 287
Driftstroom, 72
gecompenseerd door diffusiestroom, 120
Eendimensionale golf
complexe brekingsindex van, 183
fasecoëfficiënt van, 177
fasesnelheid van, 177
golfadmittantie van, 180
golfimpedantie van, 180
golflengte van, 177
intensiteit van, 181–182
polarisatietoestand van, 180
vermogensstroomdichtheid in, 180–181
verzwakkingscoëfficiënt van, 177
voortplantingscoëfficiënt van, 177, 182–183
zuiver staande, 185–186
Eendimensionale golven, 175–239
excitatie door vlakkeplaatantenne, 205–209
overdracht in gelaagd medium, 224–239
propagatie in uniforme sectie, 175–204
reflectie en transmissie door scheidingsvlak van twee media, 210–223
Eendimensionale vrije trillingen van Fabry-Perot resonator, 246–257
complexe cirkelfrequenties van
ligging in complexe vlak, 250
frequentievergelijking van, 250
met botsingsvrij plasma, 254–256
met dissipatief medium, 252–254
met verliesvrij medium, 251–252
Eenduidigheidsstelling
voor stationaire elektrische stroming, 112–115
Eenheden. *Zie ook* Internationale Stelsel van Eenheden, het
genormaliseerde schrijfwijze van, 4–5
Eikonaal, 318, 320
Eikonaalvergelijking, 318
Einstein, wet van, 44
Elektreet, 72
Elektrische fluxdichtheid, 63
Elektrische kracht, 37
Elektrische lading
in gebied, 11
wet van behoud van, 12

Elektrische polarisatie, 30
in materieel medium, 63
permanente, 72
van zwerm deeltjes met ruimtelijke ladingsdichtheid, 33
Elektrische susceptibiliteit, 68
differentiële, 71
Elektrische veldenergie, 87, 89
ruimtelijke dichtheid van, 87
van geladen bol, 91
Elektrische veldsterkte
in materieel medium, 63
in vacuüm, 36
van geladen bol, 59
van geladen cirkelcilinder, 60
van geladen lijn, 60
van geladen plaat, 60
van puntlading, 59
Elektrisch moment
ruimtelijke dichtheid van, 30. *Zie ook* Elektrische polarisatie
van gepolariseerd atoom, 34
van stelsel deeltjes, 28–30
van twee evenwijdige platen, 34
van twee tegengesteld gelijke ladingen, 33
Elektrisch veld
van permanent elektrisch gepolariseerde plak, 74
van permanent elektrisch gepolariseerde staaf, 74
Elektroden in configuratie, 104
Elektromagnetische golven, 169–239, 258–315
eendimensionale, 169–239
in frequentiedomein, 175–239. *Zie ook* Eendimensionale golven
in tijddomein, 169–174. *Zie ook* Lopende vlakke golven in vacuüm
in vacuüm, 169–174. *Zie ook* Lopende vlakke golven in vacuüm
driedimensionale vlakke
in frequentiedomein, 258–315. *Zie ook* Driedimensionale vlakke golven
Elektromagnetische kracht
ruimtelijke dichtheid van, 38
Elektromagnetische straal
niet-uniforme, 320
oppervlak van gelijke amplitude van, 319
oppervlak van gelijke fase van, 319
uniforme, 320. *Zie ook* Baan van uniforme elektromagnetische straal
intensiteit van, 323
scalaire brekingsindex van, 320
transport van vermogen langs, 322–323
voortplantingsrichting van, 320, 321
vectoriële brekingsindex van, 317, 319
Elektromagnetische stralen, 316–332
algemene theorie van, 316–324
in horizontaal gelaagd medium, 325–329
in sferisch gelaagd medium, 330–332
Elektromagnetische straling, 87
Elektromagnetische veldenergie, 89
Elektromotorische spanning, 65
Elektron
klassieke straal van, 91
lading van, 6
Elektronenmicroscoop
theorie van de afbeelding met, 324
Elektronentheorie. *Zie* Klassieke elektronentheorie
Elliptisch gepolariseerde veldgrootheid, 126
Energie
wet van behoud van, 87, 89, 93
Energiebron, 85
Energie in het elektromagnetische veld, 84–92
Equipotentiaaloppervlak, 83

Fabry-Perot etalon
elektromagnetisch contrast van, 236
reflectantie van, 233–237
transmittantie van, 233–237, 238
Fabry-Perot resonator, 240–241. *Zie ook* Eendimensionale vrije trillingen van Fabry-Perot resonator
actief medium in, 241
in laser, 241–242, 257

model voor, 246–247
passieve, 242
spiegels van, 240–241, 242, 247
reflectie-eigenschappen van, 249
Faraday, inductiewet van, 65
Fasecoëfficiënt, 177, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 196, 197, 199, 200, 201, 203–204
Fasesnelheid, 177, 185
vectoriële, 262
van uniforme vlakke golf, 266
Fasevector, 261
Fotografische plaat met periodieke zwarting, 282, 283
Fourier
analyse en synthese volgens, 131–140, 141–149
coëfficiënten van, 132, 144
integraal van, 135, 146
reeks van, 132, 144
Fouriermethoden
in de ruimte, 141–149
in de tijd, 131–140
Frequentie, 122
Fresnel, reflectiefactor van
voor E-polarisatie, 305, 306, 307, 314, 315
voor H-polarisatie, 308, 309–310, 314, 315
Fysische ruimte, 148

Gauss, stelling van, 338
modificaties van, 337–338
toepassing van, 10, 52–53, 54, 55, 65, 86, 89, 95, 110
Geïntegreerd product van veldgrootheden, 136, 147–148
Gelaagd medium
horizontaal, 325–329
sferisch, 330–332
vlak, 224–239
met drie media, 229–239
Geleidingsstroomdichtheid, 69
Gemiddeld product van veldgrootheden, 133, 145
Golf
doorgelaten, 301, 304
invallende, 290, 291, 292, 293, 301, 304
teruggekaatste, 290, 291, 292, 294, 301, 304
Golfadmittantie, 173, 180, 225
vectoriële, 262, 266
Golfimpedantie, 173, 180, 225
vectoriële, 262, 267
Golflengte, 177
in vacuüm, 201
vectoriële, 262, 266
Golfmatrix, 177–178, 211–212, 248–249
Golfvectorruimte, 148
Golfvergelijking
vectoriële, 53
Gradiënt van scalarfunctie, 336

Helmholtz, vergelijking van
eendimensionale, 176, 248
vectoriële, 259, 260
Hoek van breking. *Zie* Hoek van doorlating
Hoek van doorlating, 302, 303
beschikbaar interval voor, 303–304
Hoek van inval, 294, 301
beschikbaar interval voor, 303–304
Hoek van terugkaatsing, 295, 301, 302
Holografisch tralie, 282
Hybriede matrix, 121

Imaginaire eenheid, 122, 129
Inductiewet van Faraday, 65
Intensiteit, 181–182, 185, 213, 215, 323
Interferentiefilter, 224
Interferentiepatroon, 273
Interferentietralie, 282
Interferentie van twee uniforme vlakke golven, 275–283
met lineair gepolariseerde elektrische veldsterkte, 275–279
met lineair gepolariseerde magnetische veldsterkte, 279–282
vermogensstroomdichtheid bij, 277–279, 280–282
Interferentie van twee vlakke golven, 273–283. *Zie ook* Interferentie van twee uniforme vlakke golven
Internationale Stelsel van Eenheden (SI), het, 4, 13, 26, 33, 36, 41, 66, 73, 91, 101
Isotherm oppervlak, 100

Kettingmatrix, 121
Kinetische energie
van deeltje, 44–45
Kirchhoff, wet van, 14, 109
Klassieke elektronentheorie, 28, 58, 63, 67
geleidingsstroom in, 58
magnetisatiestroom in, 58
polarisatiestroom in, 58
Koppel
op deeltje met spinmagnetisch moment, 39–40
op elektrische halter, 41
op kringstroom, 42
op wentelende geladen bol, 42
Kracht
elektrische, 37
elektromagnetische, 37–38
ruimtelijke dichtheid van, 38
magnetische, 37
op puntlading, 36
op stelsel geladen deeltjes, 37–38
tussen twee geladen platen, 60
tussen twee puntladingen, 59
tussen twee stroomvoerende draden, 59–60
tussen twee stroomvoerende platen, 60
Kramers en Kronig, betrekkingen van, 162–163, 167. *Zie ook* Causaliteitsbetrekkingen

Lading. *Zie* Elektrische lading
Ladingsdichtheid, elektrische, 10, 54
in halfgeleider, 14
in materieel medium, 63
in metalen geleider, 14
Ladingsmiddelpunt, 29
Langevin, formule van, 74
Laplace
operator van, 18, 107, 259, 337
vergelijking van, 107
Larmorfrequentie, 42
Laser, 156, 201, 241–242
Lichtstralen. *Zie* Elektromagnetische stralen
Lineair gepolariseerde veldgrootheid, 126
Links-circulair gepolariseerde veldgrootheid, 128, 130
Links-elliptisch gepolariseerde veldgrootheid, 128
Lopende vlakke golf in vacuüm, 169–174
bewegingsvergelijking voor geladen deeltje in, 174
golfadmittantie van, 173
golfimpedantie van, 173
golfvorm van, 173
lineair gepolariseerde, 173
vermogensstroomdichtheid in, 171, 172–173
voortplantingsrichting van, 171
voortplantingssnelheid van, 171–172
Lorentzkracht, 37

Macroscopische theorie, 2
Magneet, 72
Magnetisatie, 33
in materieel medium, 63
permanente, 72
van zwerm deeltjes met convectiestroomdichtheid, 34
Magnetische flux, 65, 66
Magnetische kracht, 37
Magnetische susceptibiliteit, 68
differentiële, 71
Magnetische veldenergie, 87, 89
ruimtelijke dichtheid van, 87
Magnetische veldsterkte
in materieel medium, 63
in vacuüm, 36
van stroomvoerende cirkelcilinder, 59
van stroomvoerende draad, 59
van twee stroomvoerende platen, 61
van vlakke bundel elektronen, 60
Magnetisch moment
ruimtelijke dichtheid van, 32–33. *Zie ook* Magnetisatie
van deeltje in centraal krachtveld, 35
van deeltje in gesloten baan, 31–32
van kringstroom, 34
van spoel, 34–35
van stelsel deeltjes, 30–31, 32
van wentelende geladen bol, 35
Magnetisch veld
van permanent gemagnetiseerde plak, 74
van permanent gemagnetiseerde staaf, 75

Magneto-elasticiteit, 72
Magneto-elektrisch effect, 73
Massadichtheid, 96
Materiaal
  anisotroop, 70
  diëlektrisch ondoordringbaar, 82
  gepompt, 70
  homogeen, 70
  inhomogeen, 70
  instantaan reagerend, 70
  isotroop, 70
  lineair, 70
  locaal reagerend, 69
  magnetisch ondoordringbaar, 83
  met nawerking, 70
  niet-lineair, 70
  niet-locaal reagerend, 69
  parametrisch beïnvloed, 70
  tijdinvariant, 70
  volkomen geleidend, 82
Maxwell, James Clerk, 3, 57
Maxwell, vergelijkingen van. *Zie* Veldvergelijkingen, elektromagnetische
Mechanisch moment
  ruimtelijke dichtheid van, 39–40
  van een kracht, 39
Medium
  actief, 155
  dissipatief, 155
  passief, 155
  verliesvrij, 155
Microgolftrilholte, 241, 242
  koppelvenster in, 241, 242
Modus van een resonator
  absolute bandbreedte van, 245
  complexe cirkelfrequentie van, 244
    experimentele bepaling van, 256
    ligging in complexe vlak, 245–246
  decrescentie van, 244
  dempingscoëfficiënt van, 244
  frequentie van, 244
  kwaliteitsfactor van, 245
  reële cirkelfrequentie van, 244
  relatieve bandbreedte van, 245
  veldverdeling van, 244

Nabla-operator, 2, 336
Nawerking, 159–160

Ohm, wet van, 69
Ontstaanstempo van deeltjes, 9
  concentratie van, 9
Oppervlakken van gelijke amplitude, 262, 268–269, 269–270, 271–272, 319
Oppervlakken van gelijke fase, 262, 268–269, 269–270, 271–272, 319
Oppervlaktelading, elektrische, 78
Oppervlakteladingsdichtheid, 78
Overdrachtsmatrix
  van gelaagd medium, 226
    met drie media, 229–230
  van scheidingsvlak van twee media, 212, 226
    op basis van elektrische veldsterkte, 214, 228, 305, 312
    op basis van magnetische veldsterkte, 216, 228, 308, 313
  van uniforme sectie van een medium, 179, 226, 227–228

Parseval, formule van, 133, 136, 138, 145, 148
Passief medium, 155
  constitutieve coëfficiënten voor, 156, 157
Periode, 122
Periodieke veldgrootheden
  in de ruimte, 141
  in de tijd, 131
Permeabiliteit
  absolute, 69
  complexe, 152, 158–159
    causaliteitsbetrekkingen voor, 165–166
  differentiële, 71
  relatieve, 69
  van het vacuüm, 36
Permittiviteit
  absolute, 69
  complexe, 152, 158–159
    causaliteitsbetrekkingen voor, 165
  differentiële, 71
  relatieve, 69
  van botsingsvrij plasma, 188, 202–203
  van botsingsvrij tweecomponentenplasma, 203
  van diëlektricum met absorptielijn, 167, 191, 192, 193, 203

van diëlektricum met gestimuleerde-emissielijn, 198, 199
van diëlektricum met meer dan één absorptielijn, 194
van het vacuüm, 50
van verliesvrij diëlektricum, 186
Piëzo-elektriciteit, 72
Plaatsvector, 2, 258, 335
Plasmacirkelfrequentie, 188, 191, 194, 203, 254, 270
experimentele bepaling van, 256
Plasmaschild,
afschermende werking van, 223
Poisson, vergelijking van, 61
Polarisatie. *Zie* Elektrische polarisatie
Polarisatietoestand, 125–128
Potentiaal
elektrische scalaire, 61, 106
differentiaalvergelijking voor, 107
Poynting, theorema van, 90
complexe, 154
Poyntingvector, 91
Poynting, vector van, 88
voor sinusvormig met de tijd veranderende velden, 128–129
Propagatie van driedimensionale vlakke golven, 267–272
in botsingsvrij plasma, 270–272
in dissipatief medium, 269–270
in verliesvrij medium, 267–269
Propagatie van eendimensionale golven, 175–204
in botsingsvrij plasma, 188–191
in diëlektricum met absorptielijn, 191–194
in diëlektricum met gestimuleerde-emissielijn, 198–201
in dissipatief medium, 186–188
in metalen geleider, 194–197
in verliesvrij medium, 184–186

Radiogolven, propagatie van
in horizontaal gelaagde atmosfeer, 328
in sferisch gelaagde atmosfeer, 332
Radome
elektromagnetisch contrast van, 236
reflectantie van, 233–237
transmittantie van, 233–237, 238
Randvoorwaarde
op elektrisch ondoordringbaar voorwerp, 80, 82
op elektrode, 109
op equipotentiaaloppervlak, 83
op isolerend oppervlak, 108
op isotherm oppervlak, 100
op magnetisch ondoordringbaar voorwerp, 81, 83
op warmte-isolerend oppervlak, 100
voor elektrische fluxdichtheid, 79
voor elektrische potentiaal, 108, 109
voor elektrische veldsterkte, 78
voor magnetische fluxdichtheid, 79
voor magnetische veldsterkte, 78
voor stroomdichtheid, 79
voor temperatuur, 99
voor vermogensstroomdichtheid, 82
voor warmtestroomdichtheid, 99
Rechts-circulair gepolariseerde veldgrootheid, 127, 130
Rechts-elliptisch gepolariseerde veldgrootheid, 127
Reciprociteitsstelling
voor stationaire elektrische stroming, 118–119
Referentievlak, 178, 179, 210, 211, 224, 226, 229, 239, 248, 284–285, 289, 294, 297
Reflectantie
van anti-reflectiedeklaag, 232–233, 237, 238
van Fabry-Perot etalon, 233–237
van radome, 233–237
van scheidingsvlak van twee media, 213, 219, 220, 221, 222, 223
Reflectantiekromme, 219. *Zie ook* Reflectantie
Reflectie en transmissie door scheidingsvlak van twee media (driedimensionale vlakke golven), 297–315
algemene theorie, 297–300
betrekkingen tussen de transversale componenten van het veld, 311–314
betrekkingen tussen de z-componenten van het veld, 310–311
bij E-polarisatie, 304–307
bij H-polarisatie, 307–310
van uniforme vlakke golven, 300–304

Reflectie en transmissie door scheidingsvlak van twee media (eendimensionale golven), 210–223. *Zie ook* Reflectantie
analyse op basis van elektrische veldsterkte, 214–216
analyse op basis van magnetische veldsterkte, 216–218
Reflectiefactor
van Fresnel
voor E-polarisatie, 305, 306, 307, 314, 315
voor H-polarisatie, 308-309, 310, 314, 315
voor eendimensionale golven, 212, 215, 217, 222, 223
Reflectie tegen elektrisch ondoordringbaar voorwerp (driedimensionale vlakke golven), 289–296
algemene theorie, 289–292
bij E-polarisatie, 292–293
bij H-polarisatie, 293
van uniforme vlakke golf, 293–295, 296
Relativiteitstheorie (speciale), 3, 37, 43, 46, 49
Resonator. *Zie ook* Eendimensionale vrije trillingen van Fabry-Perot resonator; Fabry-Perot resonator; Modus van een resonator
functie van, 240
gedwongen trillingen van, 242
gesloten, 241
koppelvenster in wand van, 240
open, 241
resonantiecirkelfrequenties van, 244
experimentele bepaling van, 256
ligging in complexe vlak, 245–246
vrije trillingen van, 240–257
wand van, 240
Rooster
direct, 141
reciprook, 141–142
Rotatie van een vectorfunctie, 336
Rustenergie
van een deeltje, 44

SI. *Zie* Internationale Stelsel van Eenheden, het
SI-eenheden. *Zie* Internationale Stelsel van Eenheden, het
Snel (Snellius), wet van,
voor breking, 303
voor doorlating, 303
voor elektromagnetische stralen, 326, 331
voor terugkaatsing, 295, 301
Soortelijke geleiding, 67, 69
complexe, 152, 158–159
causaliteitsbetrekkingen voor, 164–165
differentiële, 71
van metalen geleider, 166–167, 194, 195, 196, 203
Soortelijke warmte, 96
Soortelijke warmtegeleiding, 96
Spiegelingsbeginsel van Schwarz, 245–246
Spiegelingsmethode, 296
Spinmagnetisch moment
ruimtelijke dichtheid van, 40
van deeltje, 6, 32
Staande golf, zuiver, 185–186
Stationaire elektrische stroming, 104–121
Stationaire elektrische stroom, 13
Stationaire stroming van deeltjes, 12–13
Stationaire warmtestroming, 101
Statische deeltjesverdeling, 13
Statische ladingsverdeling, 13
Stokes, stelling van, 338
modificaties van, 338
toepassing van, 51–52, 55, 56, 64, 65
Storingsrekening, 241
Stralen. *Zie* Elektromagnetische stralen
Stralenbenadering, 316
Straling, elektromagnetische, 87
Stralingsweerstand, 207. *Zie ook* Vlakkeplaatantenne
Stroomdichtheid, elektrische, 10, 57
in halfgeleider, 14
in metalen geleider, 14
Superpositiestelling
voor stationaire elektrische stroming, 115–116
Susceptibiliteit. *Zie* Elektrische susceptibiliteit; Magnetische susceptibiliteit

Tellegen, gegeneraliseerde stelling van, 109–111
Temperatuur, 95
Temperatuurverdeling
in holle stroomvoerende cilinder, 103
in massieve stroomvoerende cilinder, 102
in plak materiaal, 102
Tenietgaanstempo van deeltjes, 9
concentratie van, 9
Totale terugkaatsing, 304
Transmissiefactor
voor eendimensionale golven, 212–213
Transmittantie
van anti-reflectiedeklaag, 232–233, 234
van Fabry-Perot etalon, 233–237, 238
van radome, 233–237, 238
van scheidingsvlak van twee media, 213, 222, 223
Transversale golven, 172, 180, 266
Trilholte. *Zie* Resonator
Trillingen. *Zie* Resonator

Uitstralingsvoorwaarde, 206

Vector
normale component van, 82
tangentiële component van, 82
Vectoralgebra, 333–334
Vectoranalyse, 335–338
Vectoren
inwendig product van, 333
lineaire combinatie van, 333
scalair product van, 333
scalair tripelproduct van, 333–334
uitwendig product van, 333
vectorieel product van, 333
vectorieel tripelproduct van, 334
Vectorfuncties
differentiëren van, 335–337
naar de plaatscoördinaten, 335–337
naar een parameter, 335
integreren van, 335, 337–338
naar de plaatscoördinaten, 337–338
naar een parameter, 335
Vectorpotentiaal, magnetische, 61
Veldenenergie
elektrische, 87, 89
ruimtelijke dichtheid van, 87
van geladen bol, 91
elektromagnetische, 89
magnetische, 87, 89
ruimtelijke dichtheid van, 87
Veldvergelijkingen, elektromagnetische
in frequentiedomein, 150–152, 157
in materieel medium, 62–66
in vacuüm, 50–53
voor geladen deeltjes, 54–61
Verliesvrij medium, 155
constitutieve coëfficiënten voor, 156, 157
Vermogen, elektromagnetisch, 87
Vermogensbalans, elektromagnetische, 87, 89
in frequentiedomein, 153–156, 157
Vermogensverstrooiingsmatrix
van gelaagd medium
met drie media, 230–238
van scheidingsvlak van twee media, 213, 218
op basis van elektrische veldsterkte, 215
op basis van magnetische veldsterkte, 217–218
Verstrooiingsmatrix
van gelaagd medium, 227
met drie media, 230
van scheidingsvlak van twee media, 212
op basis van elektrische veldsterkte, 214, 305–306, 312
op basis van magnetische veldsterkte, 217, 308, 313–314
van uniforme sectie van een medium, 179
Verzadiging, 68–69
Verzwakkingscoëfficiënt, 177, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 196, 197, 199, 200, 201, 203-204
Verzwakkingsvector, 261
Vierkantswortel uit complex getal
rekenschema voor, 339–340
Vlakkeplaatantenne
elektromagnetisch veld van, 205–209
stralingsweerstand van
in grensvlak van twee media, 209

in medium, 207, 209
in vacuüm, 209
uitgestraald vermogen van, 207, 209
Vlak van inval, 294, 301
Voortplantingscoëfficiënt, 177, 184, 186, 188, 192, 195, 199, 225
Voortplantingssnelheid van elektromagnetische golven in vacuüm, 43
Voortplantingsvector, 261
vergelijking voor, 261

Waarnemer, 1
plaats van, 1
standaardklok van, 1
standaardmeetlat van, 1
tijd van ,1
Warmte, hoeveelheid ontwikkelde, 89, 102
Warmtebalans, 93–94, 95
Warmtegeleiding, theorie van de, 93–103
Warmtegeleidingsvergelijking, 96
Warmteoverdrachtscoëfficiënt, 100
Warmtestroom
in holle stroomvoerende cilinder, 103
in massieve stroomvoerende cilinder, 102
in plak materiaal, 102
Weerstandsmatrix, 117, 119

Zwerm deeltjes, 6–7, 10, 30, 33, 38, 39, 84

(B 1627) Gedrukt in België door Ceuterick n.v.
Brusselse straat 153 B 3000-Leuven
A. Struyf Oude Baan 353 B 3040 Korbeek-Lo

Auhd 1511798
C 2349930

In dit boek worden op systematische wijze de grondslagen van de theorie van het elektromagnetische veld behandeld. Na een korte bespreking van de theorie van de diffusie en van de warmtegeleiding volgen een aantal toepassingen (voornamelijk eenvoudige elektromagnetische golfverschijnselen in diverse configuraties).
De toepassingen zijn ontleend aan de telecommunicatietechniek, de optica en de fysische elektronica. Het verkrijgen van kwantitatieve resultaten staat hierbij centraal.
De opbouw van het boek is tamelijk axiomatisch, zowel in natuurkundig als in wiskundig opzicht. De lijn van het betoog is daardoor strakker dan in vele andere boeken op het vakgebied. Van de aanvang af wordt ondersteld, dat de optredende veldgrootheden zowel in de ruimte als in de tijd variëren; in dit opzicht wijkt de opbouw van het boek af van hetgeen traditioneel is.
Door het gehele boek heen worden SI-eenheden gebruikt.
Iedere paragraaf bevat een aantal vraagstukken (met bijbehorende antwoorden), waardoor het boek goed bruikbaar is als leerboek.

Prof. Dr. Ir. A .T. de Hoop is sedert 1960 gewoon hoogleraar in de afdeling der elektrotechniek en de afdeling der algemene wetenschappen van de Technische Hogeschool Delft en heeft de opdracht onderwijs te geven in de theoretische elektriciteitsleer en de toegepaste wiskunde. Zijn wetenschappelijk onderzoek beweegt zich in hoofdzaak op het terrein van van de excitatie, de propagatie en de diffractie van elektromagnetische, akoestische en elastische golven in diverse configuraties. Hij behaalde in 1958 de graad van doctor in de technische wetenschappen aan de Technische Hogeschool te Delft en heeft een aantal publikaties in internationale vaktijdschriften op zijn naam staan.

DELFTSE UNIVERSITAIRE PERS

nslag: R. Bakkeren